FACULDADE DE PSICOLOGIA

FACULDADE DE MEDICINA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

FACULDADE DE LETRAS

O DESENVOLVIMENTO DAS REPRESENTAÇÕES DA MAGNITUDE DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Teresa Bettencourt Espadinha

Dissertação de Mestrado

MESTRADO EM CIÊNCIA COGNITIVA

2015

FACULDADE DE PSICOLOGIA

FACULDADE DE MEDICINA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

FACULDADE DE LETRAS

O DESENVOLVIMENTO DAS REPRESENTAÇÕES DA MAGNITUDE DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Teresa Bettencourt Espadinha

Dissertação orientada pela Doutora Mafalda Mendes

MESTRADO EM CIÊNCIA COGNITIVA

2015

AGRADECIMENTOS

Candidatei-me ao Mestrado em Ciência Cognitiva por ter saudades de aprender, e por ter vontade de aprender como ser aprende. No fim de um caminho percorrido, vêm à lembrança os desânimos e as feridas, mas também as alegrias e ganhos. De tudo foi feito este caminho e a todos os que me ajudaram a percorrê-lo quero agora agradecer:

À minha orientadora, a Doutora Mafalda Mendes, pelo seu apoio, empenho e paciência, nas várias fases do projeto, pelas críticas construtivas que me ajudaram a melhorar.

A todos participantes que de forma muito paciente colaboraram nesta experiencia. A todos os que agilizaram a recolha de dados, em particular à professora Hélia Rodrigues, à professora Ana Ramalho e ao professor Duarte Alão.

Aos meus colegas e amigos do Mestrado em Ciência Cognitiva, que partilharam comigo este caminho intelectualmente tão estimulante. Agradeço em especial ao Luís e ao Miguel, pelas incansáveis palavras de incentivo nos momentos de desânimo, pela amizade, pela ajuda indispensável para me manter neste caminho até ao fim.

Ao João, que me picou para ir expandir a mente e entrar neste Mestrado e que me ajudou em vários momentos do caminho.

A todos os amigos que estiveram por perto, que me ouviram e me apoiaram.

Aos meus alunos, fonte de inspiração da minha vontade de saber mais.

A toda a minha família, por ser a minha força e orgulho. À tia Elisa e ao tio Pedro, pelos conselhos académicos e sugestões construtivas. À minha mãe, não só pela escuta dos meus desabafos, pelas palavras de serenidade, pela entrega de canja de galinha, por me ver maior do que eu me vejo, mas principalmente pelo exemplo de vida que é para mim- uma mulher corajosa e sonhadora, a quem devo muito do que sou. Ao meu Pai, por todo o apoio e pelos mimos que muita força deram para o caminho.

À minha avó Lurdes, de quem tantas saudades tenho, que me inspirou a procurar a excelência, a acreditar que com trabalho e persistência não há caminhos impossíveis.

Sentir a presença de Deus durante uma caminhada que apresentou dificuldades, em que me apercebi das minhas fraquezas e fragilidades, foi um dos ganhos desta jornada.

RESUMO

A capacidade de discriminar magnitudes numéricas tem sido apontada como uma competência partilhada entre humanos e outras espécies animais. Várias linhas de investigação suportam a hipótese de que o ser humano partilha com outras espécies animais um sistema biologicamente primário que o torna capaz de compreender não só quantidades absolutas como 1, 2, 3 ou 4, mas também quantidades relativas, representadas como uma razão entre duas quantidades absolutas (e.g. 2/5). No entanto, a compreensão e manipulação de quantidades relativas, em particular quando expressas na forma de frações, parece ser uma das temáticas em que as crianças atravessam mais dificuldades na disciplina de matemática. No presente estudo, procurou-se investigar e caracterizar as representações mentais da magnitude de números fracionários em grupos etários distintos. Explorou-se também o impacto que estas representações têm na destreza em tarefas de cálculo, em particular naquelas que envolvem números fracionários. Para tal, utilizou-se uma tarefa de classificação mesmo-diferente, envolvendo frações em dois formatos distintos e um teste em papel sobre conhecimentos e cálculo envolvendo frações. Os resultados da tarefa de classificação mesmo-diferente apontam para uma melhoria da precisão das representações com o aumento da idade. Foram também encontradas correlações entre o desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente e o teste de conhecimentos e aritmética de frações, o que aponta para um impacto positivo da capacidade de representar mentalmente frações no desempenho em cálculo envolvendo frações.

Palavras Chave: Frações; Representações de Magnitude; Desenvolvimento numérico; Raciocínio proporcional.

ABSTRACT

The ability to discriminate numerical magnitudes has been identified as a shared competence between humans and other animal species. Several lines of research support the hypothesis that humans share with other species a biologically primary system that makes them able to comprehend not only absolute amounts like 1, 2, 3 or 4, but also relative amounts, represented as a ratio of two absolute amounts (e.g. 2/5). However, the understanding and manipulation of relative amounts, particularly when expressed as fractions, seems to be one of the topics in which children go through more difficulties in mathematics. In the present study, we sought to investigate and characterize the mental representations of the magnitude of fractional numbers in different age groups. We also explored the impact that these representations have in the dexterity in calculation tasks, particularly those involving fractional numbers. To this end, we used a matching task involving fractions in two different formats, and a paper test on fraction knowledge and calculation. The results of the matching task point to an accuracy improvement of representations with increasing age. Correlations were found between the performance in the matching task and the results on the paper test on fraction knowledge and calculation, which points to a positive impact of the accuracy of numerical representations in performance calculation involving fractions.

Keywords: Fractions; Magnitude Representations; Numerical development; Proportional reasoning.

Índice

Índice de Figuras

Figura 3.6: Média (e erro padrão) dos valores de *d'* para os ensaios de cada grupo de escolarização, para cada ordem de apresentação, para a condição experimental mesmo.

Figura 3.7: Média (e erro padrão) dos valores de *Δd*' , para na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica.

Figura 3.8: Média e erro padrão valores de *Δd*' , para as duas ordens de apresentação, por grupo.

Figura 3.9: Média (e erro padrão) das classificações, em percentagem, no teste de conhecimentos de frações, por grupo de participantes.

Figura 3.10: Média (e erro padrão) das classificações (0-50) das categorias conceptual e de compreensão de magnitudes do teste de conhecimentos de frações, por grupo de participantes.

A presente dissertação enquadra-se no âmbito do mestrado em Ciência Cognitiva, e situa-se no campo da cognição numérica, cruzando as áreas da psicologia cognitiva e da neurociência. Apesar do estudo apresentado ser de natureza comportamental, será feita uma abordagem aos processos neuronais subjacentes aos processos comportamentais estudados.

1. Introdução

"How does the brain acquire mathematics? What is the nature of mathematical intuition, and can one improve it? What are the relations between mathematics and logic? Why is mathematics so efficient in the physical sciences? These are not just the academic ruminations of philosophers hidden in their ivory towers. The answers we give to them have a profound impact on our educational policies and research programs. Piaget's constructivism and Bourbaki's austere rigor have left their marks on our schools. Will such trenchant educational theories ever give way to more serene and better optimized teaching methods, based on a genuine understanding of how the human brain does mathematics? Only a thorough consideration of the neuropsychological bases of mathematics may move us closer to achieving that crucial goal." (Dehaene, 1999)

A cognição numérica ocupa-se do estudo de estruturas neuronais e cognitivas que sustentam a compreensão dos números e suas operações. Raízes quadradas, equações e primitivas são exemplos de construções matemáticas que envolvem aprendizagem e estruturas de mais alto nível. No entanto, parecem existir estruturas nucleares que suportam o desenvolvimento de tais construções. A investigação tem oferecido evidências de que a discriminação de quantidades numéricas e a sua representação são capacidades inatas do ser humano e até de outras espécies animais.

Muitas são as questões que emergem. Por exemplo, a partir de que altura são os bebés capazes de distinguir alterações de quantidades de um dado conjunto? Que animais partilham com a espécie humana esta sensibilidade numérica? Como é que os seres humanos desenvolvem um sistema simbólico que permita representar de forma exata diferentes numerosidades?

Dehaene (1999) propõe que a resposta a questões como esta está no órgão que nos permite reconhecer os números – o cérebro. Os avanços na neurociência e as novas ferramentas de imagiologia têm permitido um conhecimento cada vez maior das etapas de desenvolvimento das representações de numerosidades. Multiplicam-se os trabalhos que procuram perceber que áreas corticais são preferencialmente utilizadas em tarefas numéricas. (Brannon, 2006, Nieder & Dehaene, 2009, Shuman & Kanwisher, 2004). Procura-se entender como é que é atribuído significado aos símbolos que conhecemos como números – 1, 2, 34, etc. Estudam-se as etapas de desenvolvimento deste processo, a influência da linguagem, a presença destas habilidades noutras espécies animais.

Alarga-se também a abrangência do estudo da nossa capacidade numérica, emergindo a hipótese de uma sensibilidade automática para reconhecer uma magnitude relativa, isto é a razão entre duas magnitudes. (revisão em Jacob, Vallentim Nieder, 2012). Esta hipótese ergue novas áreas de investigação: Serão os seres humanos dotados de um sistema basilar que permite reconhecer a metade, a terça parte ou dois quintos? Quando emerge este sistema e como se desenvolve? Será esta capacidade partilhada com outras espécies animais? Como é que as crianças atribuem significado aos símbolos construídos para representar de forma exata estas quantidades – ½, 1/3, 2/5. Como se tornam capazes de manipular estes símbolos? E por que razão revelam tantas dificuldades em fazê-lo?

Perceber a forma como são representadas e manipuladas magnitudes numéricas, em particular de números fracionários, foi o interesse desta dissertação. Procurou-se estudar a precisão destas representações em diferentes fases do desenvolvimento, e perceber a forma como se relacionam e influenciam a destreza aritmética.

A proposta de que a instrução/educação influencia a capacidade de reconhecer e comparar quantidades numéricas coloca a cognição numérica no palco de interesse não só da psicologia e da neurociência, mas também da educação da matemática. Entender como surgem e evoluem as capacidades numéricas, caracterizar as capacidades espectáveis em cada idade, pode contribuir para desenhar mais eficazes métodos de ensino. Por outro lado, perceber o impacto ou relação entre a instrução e as capacidades numéricas permite um maior conhecimento do funcionamento das estruturas neuronais que servem estas funções cognitivas.

No primeiro capítulo desta dissertação é apresentado um enquadramento teórico acerca da representação de quantidades numéricas. Primeiramente é abordada a capacidade de representar quantidades numéricas inteiras, quer em seres humanos quer em outras espécies animais, bem como os argumentos que militam a favor da teoria de uma natureza inata desta capacidade.

O segundo capítulo apresenta o estudo empírico realizado, que inclui a descrição das tarefas propostas – a tarefa de classificação mesmo-diferente e o teste de conhecimentos de frações. A tarefa de classificação mesmo-diferente, adaptada de Gabriel e Szucs (2013), pretendeu caracterizar a precisão de representações da magnitude de números fracionários em grupos etários distintos. Nesta tarefa, os participantes foram expostos a sucessivos pares de frações, representadas simbólica e não simbolicamente, devendo identificar aqueles que correspondiam à mesma magnitude. Foi também aplicado um teste de conhecimento de frações, com o objetivo de explorar correlações entre os seus resultados e a precisão das representações da magnitude de números fracionários.

No terceiro capítulo são apresentados os resultados do estudo. Finalmente, o quarto capítulo contém a discussão dos resultados obtidos e da forma como estes se relacionam com trabalhos anteriores na área. É apresentada ainda uma reflexão crítica do estudo e uma abordagem a possíveis questões para investigações futuras.

1.1. Representação de quantidades numéricas

As magnitudes numéricas podem ser representadas de forma simbólica, recorrendo a dígitos que estejam associados a determinadas quantidades (como é o exemplo dos numerais árabes - 1, 20, 33) e que por isso requerem linguagem, ou de forma não simbólica, recorrendo a conjunto de pontos ou outros itens que representam uma quantidade de forma abstrata e que não requerem linguagem.

O sistema de representação não-simbólico, permite ao homem e a outras espécies animais representar quantidades numéricas de forma aproximada, possibilitando comparar e estimar quantidades de objetos (revisão em Ansari, 2008), e até mesmo fazer cálculos aritméticos aproximados (Kobayashi, Hiraki, Mugitani, & Hasegawa, 2004). Este sistema é descrito como universal e independente da linguagem, uma vez que existem indícios da presença do mesmo em crianças em idade pré verbal (Cantlon & Brannon, 2006), em adultos sem instrução em léxico numérico (Pica, Lemer, Izard & Dehaene, 2004) e em primatas não humanos (Brannon, 2006, Cantlon & Brannon, 2006, Nieder, 2005).

A precisão da discriminação de numerosidades não simbólicas parece aumentar nos primeiros anos de vida (Siegler, Lortie-Forgues, 2014). Nos primeiros anos de vida, as crianças já mostram sinais de sensibilidade para alterações na dimensão de um conjunto de pontos. No entanto, esta sensibilidade está dependente da razão entre as duas quantidades. O estudo de Xu & Spelke, (2000) usou um paradigma de habituação para estudar a sensibilidade de bebés de 6 meses a diferentes quantidades numéricas, controlando variáveis como brilho, cor e dimensão. O estudo reporta diferenças nos tempos de observação dos bebés, quando confrontados com conjuntos de 16 pontos, após terem sido habituados a conjuntos de 8 pontos. O aumento do tempo de observação que se registou aquando da alteração da dimensão do conjunto de pontos sugere que as crianças identificam a diferença. Quando, numa segunda experiência, os bebés foram habituados a um conjunto de 8 pontos e confrontados com conjuntos de 12 pontos, os autores não encontraram diferenças significativas nos tempos de observação.

Estudos subsequentes abordaram a capacidade de discriminar quantidades e a sua relação com a razão entre as quantidades de pontos dos dois conjuntos a comparar. Wood e Spelke (2005) mostraram que aos nove meses de idades as crianças já são capazes de discriminar entre conjuntos relacionados na razão de três para dois (discriminar entre conjuntos de seis e quatro elementos, por exemplo). A discriminação entre conjuntos relacionados na relação de quatro para três parece acontecer a partir dos três anos de idade. (Halberda & Feigenson, 2008). Aos seis anos de vida, as crianças mostram-se sensíveis a alterações da dimensão de conjuntos de pontos na razão de 6:5 - por exemplo distinguir conjuntos de dezoito de conjuntos de quinze pontos. Apenas alguns adultos conseguem identificar alterações na razão de onze para dez, isto é, distinguir, por exemplo, conjuntos de vinte pontos de conjuntos de vinte e dois pontos. A figura 1.1 ilustra e evolução da precisão da discriminação de numerosidades ao longo do desenvolvimento.

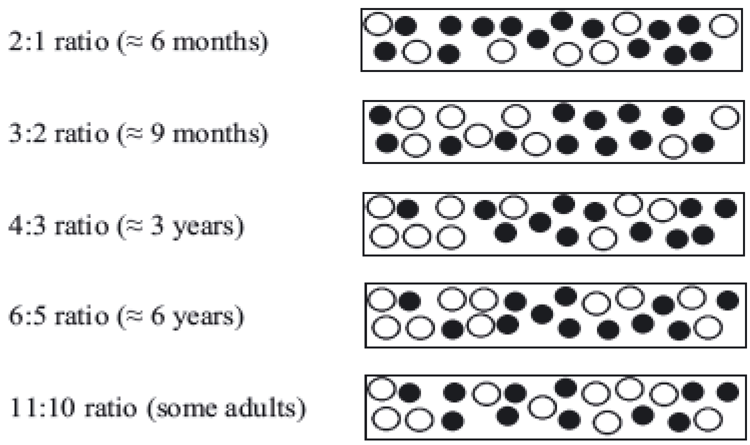


Figura 1.1: Discriminação de numerosidades (Siegler, Lortie-Forgues, 2014)

A capacidade de identificar diferenças entre numerosidades de dois conjuntos parece ser condicionada pela razão entre os dois conjuntos seguindo por isso a lei de Weber (Gallistel, & Gelman, 2000). Segundo a lei de Weber, posteriormente lei de Weber-Fechner (Dehaene, 2003), a resposta a um estímulo é proporcional à sua intensidade. Assim sendo, quanto maior for a diferença relativa das quantidades a comparar, maior é o sucesso na identificação das diferenças.

Também estudos em comunidades indígenas cujo vocabulário é fraco em léxico que represente números, reforçam a independência do sistema de representação de magnitudes em relação à linguagem. Pica e seus colaboradores, realizaram tarefas de aritmética com participantes do grupo indígena *Munduruku* mostrando que mesmo sem a existência de léxico para representar de forma exata numerosidades superiores a 5, os participantes eram capazes de adicionar e comparar com sucesso quantidades aproximadas. (Pica et al., 2004). Numa das tarefas propostas, os participantes foram confrontados com conjuntos de pontos e foi-lhes solicitado que identificassem quantos pontos estavam presentes. Apesar da ausência de léxico para representar de forma exata números superiores a cinco, os participantes utilizavam expressões como “todos os dedos das mãos e mais alguns” para identificar, por exemplo, a quantidade treze.

Alguns estudos com animais também mostram que algumas espécies conseguem distinguir quantidades numéricas e realizar tarefas aritméticas (e.g. Cantlon & Brannon, 2007). Cantlon e Brannon testaram a capacidade de macacos Rhesus de ordenar conjuntos de pontos e de estender regras numéricas aprendidas após o aumento do número de pontos. Depois de submetidos a um treino de ordenação de conjuntos de pontos com dimensão entre um e nove, os macacos eram confrontados com conjuntos de dez, quinze, vinte e trinta pontos. Os macacos conseguiram estender a regra aprendida no treino e realizar a tarefa de ordenação com os novos estímulos. Os macacos conseguiram ainda realizar com sucesso uma tarefa de adição de conjuntos de pontos apresentados sequencialmente, selecionando a opção correta em setenta por cento dos casos. A presença destas capacidades numéricas em outras espécies animais corrobora a hipótese de uma natureza filogenética da arquiteturas cognitivas que suportam o processamento numérico em seres humanos.

Quando, por meio de instrução, os seres humanos adquirem representações simbólicas dos números, pensa-se que estas representações serão mapeadas nas já existentes representações não simbólicas.

Como apontam Fias, Lammertyn, Reynvoet, Dupont e Orban (2003), as representações simbólicas não têm em geral relação direta com a magnitude que representam. O símbolo “6” que em numeração árabe é utilizado para representar a quantidade seis, não tem no seu aspeto visual nenhuma característica que traduza a magnitude que representa. A instrução permite que estes símbolos sejam associados a determinadas magnitudes. Este processo de associação envolve não só uma aprendizagem da linguagem simbólica, como a maturação de regiões cerebrais envolvidas no mapeamento entre as representações numéricas simbólicas e não-simbólicas, ocorrendo por isso de forma gradual. (Cantlon, Brannon, Carter & Pelphrey, 2006). Um estudo de eletrofisiologia em macacos sugere que este mapeamento semântico – entre um símbolo e a quantidade que este representa parece ser suportado pelo córtex pré-frontal (Diester & Nieder, 2007). Neste trabalho, dois macacos foram treinados para associar conjuntos de pontos aos símbolos numéricos correspondentes. Depois de um período de aprendizagem, foram analisadas as ativações do córtex pré frontal e do sulco intraparietal. Os autores reportaram ativações de células do córtex parietal quer durante a observação de conjuntos de pontos quer durante a observação de símbolos numéricos. Mais ainda, a ativação destes neurónios foi preditora do sucesso na tarefa, o que aponta para um papel basilar desta região no mapeamento entre representações não simbólicas e simbólicas de quantidades numéricas.

Uma das medidas que tem sido utilizada para aceder às representações de numerosidades é o efeito de distância (Moyer & Landauer’s, 1967). Segundo este efeito, a comparação de numerosidades é facilitada com o aumento da distância entre as numerosidades. Por exemplo, comparar três e nove é mais fácil do que comparar três e quatro. Quanto maior for a distância entre os dois números a comparar, menores serão os tempos de resposta e as taxas de erro. Este efeito foi encontrado em formatos simbólicos e não simbólicos. Umas das explicações apontadas para este efeito alega que a maior proximidade entre duas quantidades numéricas corresponde a uma maior semelhança dos esquemas de codificação a nível neuronal, o que dificulta a sua distinção (Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan & Dehaene, 2004). Segundo o modelo proposto por Dehaene e Changeux (1993) os números são representados corticalmente por populações de neurónios, que estão sintonizadas para uma determinada quantidade, isto é, disparam preferencialmente para essa quantidade. Dados de eletrofisiologia em macacos (Nieder & Miller, 2002) reforçam a plausibilidade deste modelo. Nieder e Miller estudaram a ativação de células do córtex pré-frontal de macacos numa tarefa numérica não simbólica, envolvendo conjuntos de pontos de dimensão entre um e cinco. Os resultados da experiência mostraram a existência de células de regiões pré-frontais preferencialmente ativas para determinadas quantidades numéricas. Apesar de responderem de forma máxima a uma determinada quantidade, estas populações neuronais responderam também a quantidades vizinhas verificando-se uma diminuição progressiva da ativação à medida que a quantidade se afasta da quantidade-alvo. Para cada numerosidade, a sintonização de populações neuronais é modelada por uma curva gaussiana (*cf* figura 1.2). A maior proximidade das duas quantidades leva a uma maior sobreposição das curvas que modelam a sua ativação e por isso a uma maior dificuldade em distinguir entre essas quantidades.

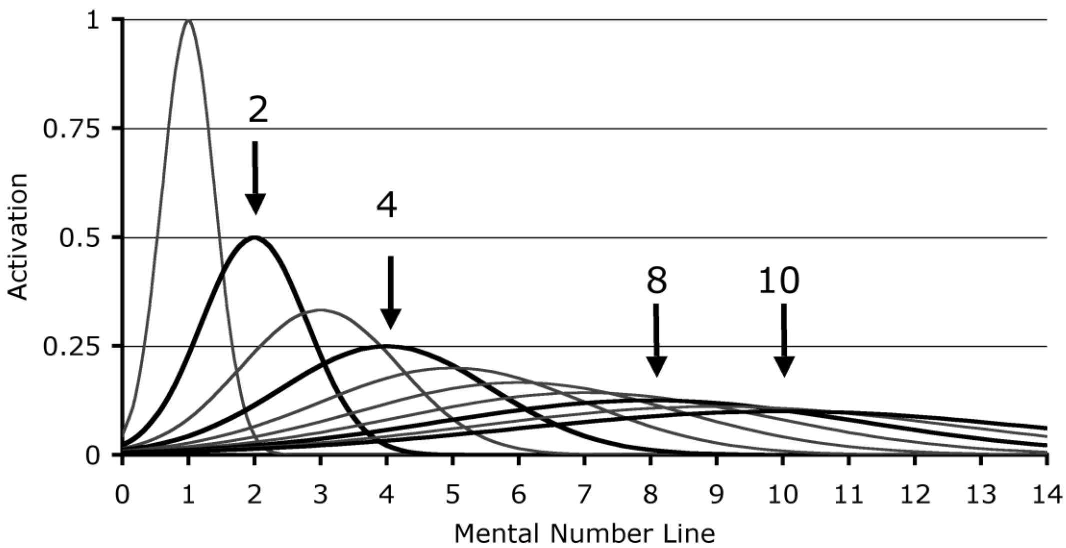


Figura 1.2: Sobreposição das curvas de sintonização [Pietroski, Lidz, Hunter & Halberda, 2009].

Alguns trabalhos apontam para diferenças nos efeitos de distância nos dois formatos, sendo os efeitos em formatos não simbólicos mais manifestos do que em formatos simbólicos (Roggerman, Verguts & Fias 2007). Foram também reportadas alterações ao longo do desenvolvimento, verificando-se uma diminuição da intensidade do efeito com o aumento da idade (Duncan & McFarland, 1980; Sekuler & Mierkiewicz, 1977).

1.2. Correlatos neuronais para a representação de número

O sulco Intraparietal (SIP), em particular o seu segmento horizontal, tem sido apontado como a região que serve a representação e compreensão de quantidades numéricas. (e.g.. Dahaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003, Piazza et al 2004, Feigenson, Dehaene, Spelke (2004).(*cf* figura 1.3) Em tarefas que envolvem cálculo mental, parecem estar envolvidas também áreas como córtex pré-frontal e córtex pré-central. (Dehaene, Molko, Cohen & Wilson, 2004).

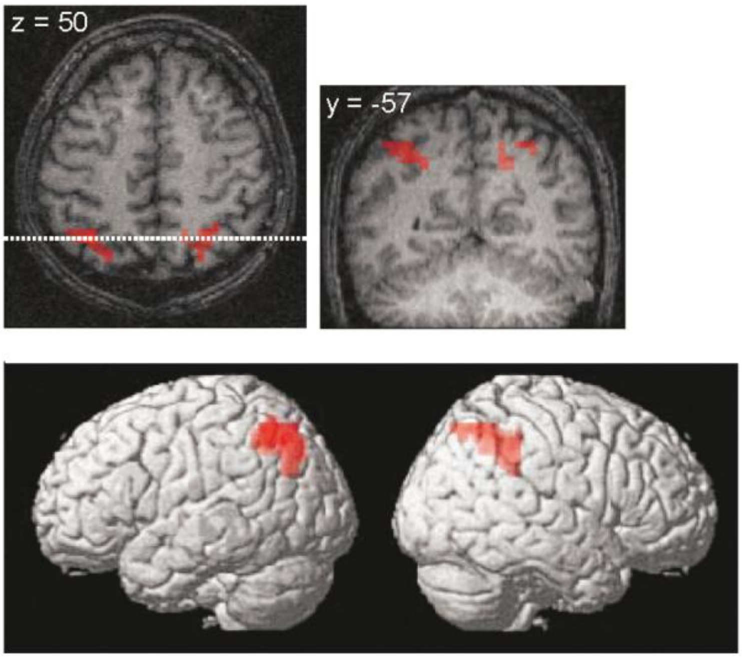


Figura 1.3: Regiões envolvidas no processamento numérico – [Piazza et al, 2004]

A ativação do sulco intraparietal foi encontrada em tarefas de comparação de quantidades numéricas representadas por conjuntos de pontos (Piazza et al. 2004), e também em tarefas de comparação de quantidades numéricas representadas simbolicamente na forma de numerais árabes (Pinel, Dehaene, Riviere & LeBihan, 2001).

Em linha com os resultados observados de estudos comportamentais, evidência de estudos de ressonância magnética funcional sugerem que a ativação das regiões neuronais que suportam o processamento numérico simbólico sofrem alterações ao longo do desenvolvimento (Ansari, Garcia, Lucas, Hamon, & Dhital, 2005). Ansari e seus colaboradores analisaram a ativação de regiões cerebrais de crianças e adultos numa tarefa de comparação de quantidades numéricas. Os dados da experiência revelaram uma maior ativação de regiões frontais no hemisfério direito nas crianças, quando comparadas com o grupo de adultos, que exibe uma maior ativação de regiões parietais bilateralmente. Estas alterações poderão ser resultado de um mapeamento mais flexível entre as representações simbólicas e as quantidades que estas representam – na idade adulta haverá um maior automatismo que permite um menor recrutamento de regiões frontais (Ansari et al., 2005).

A existência de regiões cerebrais análogas no córtex de primatas não humanos, também ativas no processamento numérico, ilustrada na figura 1.4, suporta a teoria de que existirá uma herança evolutiva de estruturas capazes de identificar numerosidades. (Dehaene et al., 2004).

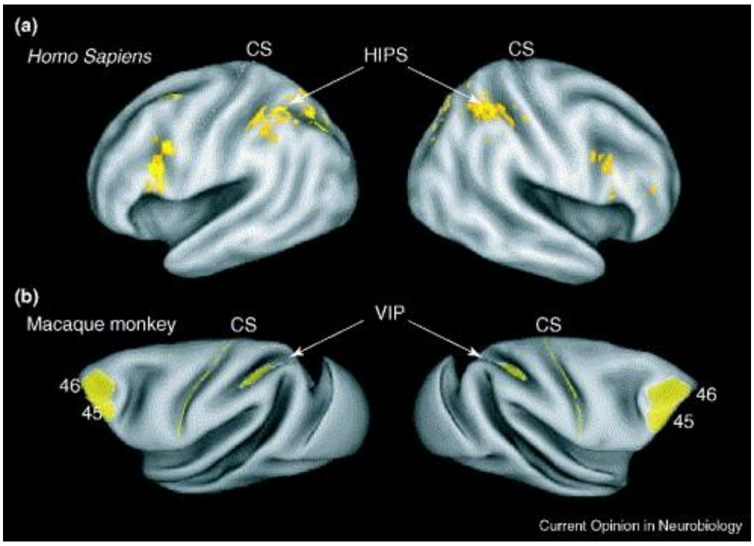


Figura 1.4: Regiões envolvidas na representação de numerosidades [Dehaene et al., 2004]

Dados de imagiologia apontam para uma maior manifestação do efeito de distância no sulco intraparietal esquerdo em adultos do que em crianças, mesmo quando o desempenho na tarefa é semelhante. (Ansari e Dhital, 2006). Ansari e Dhital utilizaram uma tarefa de comparação, na qual os participantes tinham de selecionar entre dois conjuntos de pontos, aquele que representava uma maior quantidade. Apesar de encontrarem resultados semelhantes no desempenho da tarefa, os autores descrevem uma maior ativação do sulco intraparietal no grupo de adultos, do que no grupo de crianças, que recrutam a região do córtex pré-frontal dorso lateral e ventro lateral direito. Estes resultados sugerem que com o desenvolvimento existe um aumento do recrutamento do sulco intraparietal esquerdo.

Evidências apontam também para uma maturação tardia de regiões frontais responsáveis por funções executivas, atenção e coordenação motora, em comparação a outras regiões frontais (Gogtay et al 2004). Na análise de diferenças entre grupos de participantes de diferentes idades, em tarefas de comparação numérica, é importante atender aos processos envolvidos na tarefa. O desenvolvimento de funções executivas, que ocorre mais tardiamente no desenvolvimento, reflete-se nos resultados de tarefas que envolvam processamento estratégico, como o são as tarefas de comparação numérica.

1.3. Representações de quantidades relativas

Após várias décadas de investigação sobre os sistemas de representação para quantidades numéricas absolutas, um novo interesse tem marcado a investigação em cognição numérica – a capacidade de representar uma razão entre duas quantidades numéricas. A abordagem aos números fracionários surge na escola, por meio de instrução. No entanto, vários autores se têm questionado se a capacidade de reconhecer uma determinada magnitude relativa, como a metade ou a terça parte, não será também inata (revisão em Jacob et al., 2012).

Para além de um senso numérico, isto é, de uma capacidade instintiva para representar quantidades de objetos, novas linhas de investigação apontam para a existência de um “sentido para representar razões”. A capacidade de reconhecer uma quantidade relativa parece assentar em estruturas inatas. Uma explicação plausível para esta aptidão invoca motivos evolutivos, segundo os quais o reconhecimento da razão entre duas quantidades terá sido uma vantagem. Num estudo de meta-análise, Jacob e seus colaboradores sugerem que a interação entre humanos e entre outras espécies animais parece ser influenciada, pelo menos a um nível inconsciente, por atributos numéricos representados por quantidades relativas (Jacob et al., 2012).

Alguns estudos exploraram a existência de um raciocínio proporcional na tomada de decisão de algumas espécies animais. Um dos exemplos da presença deste tipo de raciocínio é o modelo apresentado por Wilson, Britton e Franks, (2002), que procurou descrever a predisposição para o ataque em grupos de chimpanzés, prevendo que o ataque de um grupo acontecesse nos casos em que a razão entre predadores e presas fosse de 3:2.

Esta natureza implícita de um raciocínio proporcional parece estar também presente na tomada de decisão de seres humanos (Jacob, et al 2012). Determinadas proporções no corpo humano parecem estar associadas a um aumento de indicadores de agradabilidade e atração física. Por exemplo, a razão entre os comprimentos da cintura e ancas das mulheres parece ser, segundo a opinião masculina, um atributo físico fortemente correlacionado com a atratividade das mulheres (Singh, 1993).

À semelhança das representações de números inteiros, as representações de razões também podem ser expressas em *notação simbólica*, como quociente de dois dígitos (3/4, 2/25) ou em *notação não simbólica*, isto é uma representação não verbal de uma razão entre duas magnitudes absolutas não simbólicas. Tal como acontece quando recebem instrução acerca de números fracionários, as crianças começam por aprender a associar as representações simbólicas (como 1/3 por exemplo) a uma representação pictórica da relação parte/todo. (*cf* figura 1.5).

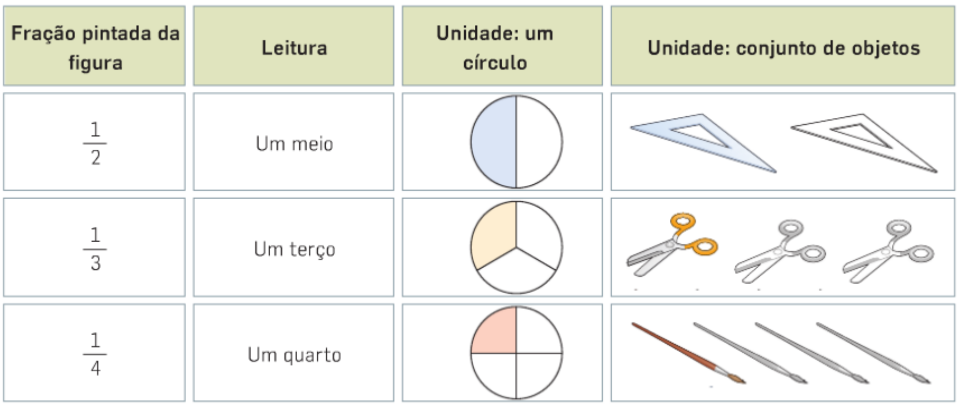


Figura 1.5: Instrução relativa à magnitude de uma fração, em contexto escolar [Monteiro, Pinto & Ribeiro (2010)]

As representações de razões possuem uma especificidade em relação às representações de quantidades absolutas – o facto de existirem infinitas representações simbólicas de uma mesma magnitude (a magnitude a que se refere 3/4 é a mesma a que representada por 6/8 ou 9/12 – frações equivalentes). Esta especificidade contribui também para a maior complexidade das representações simbólicas de razões em relação às representações simbólicas de números inteiros. Lamon (2007) refere que as razões, proporções e frações são os tópicos de maior complexidade e exigência cognitiva do currículo escolar. Por outro lado, são também um tópico fundamental para a matemática e ciência, sendo por isso alvo de interesse de investigação científica. Ao nível comportamental, para caracterizar as representações simbólicas e não simbólicas de razões, têm sido utilizados essencialmente dois paradigmas experimentais: 1) utilizando tarefas de comparação de frações, onde se pede aos participantes que identifiquem de entre duas frações, a de menor ou a de maior magnitude; ou 2) tarefas de classificação mesmo-diferente, onde os participantes têm de identificar se duas frações correspondem ou não à mesma quantidade (e.g. Bonato, Fabbri, Umiltá, & Zorzi (2007), Gabriel & Szucs 2013, Sprute & Temple, 2011). Estes trabalhos procuraram identificar a forma como são processadas as magnitudes de razões e os mecanismos envolvidos neste processamento. Resultados de estudos usando estas tarefas reportaram, à semelhança do que sucede para quantidades inteiras, efeitos de distância nos tempos de reação e na precisão de respostas (Bonato et al., 2007, Meert, Gregoire & Noel, 2009, Gabriel & Szucs, 2013, Ischebeck, Schocke & Delazer, 2009, Schneider & Siegler, 2010, Sprute & Temple, 2011). No entanto, a evolução deste efeito ao longo do desenvolvimento e percurso escolar parece seguir padrões diferentes dos padrões observados em quantidades absolutas, registando-se uma tendência para o aumento da intensidade do efeito, ao contrário do que acontece com as quantidades absolutas (Gabriel & Szucs, 2013).

Gabriel e Szucs (2013) procuraram estudar a ativação da magnitude de números fracionários em crianças de 5º, 6º e 7º ano de escolaridade e em adultos. Para isso analisaram o efeito de distância numa tarefa de comparação de frações e numa tarefa de classificação mesmo-diferente entre pares frações. Neste estudo, os pares de frações eram apresentados em simultâneo, como o quociente de números naturais (por ex. 3/8 vs 4/7). Os autores encontraram efeitos de distância na tarefa de comparação, mas não na tarefa de classificação mesmo-diferente. O facto da ativação da representação da magnitude da fração depender da tarefa sugere, segundo os autores, que esta não é automática. A tarefa utilizada em Gabriel e Szucs (2013) apenas utilizou frações em notação simbólica. Para além disso, a apresentação de frações em simultâneo, durante um período de 7 segundos, poderá ter permitido um processamento estratégico que impede uma caraterização da efetiva representação da magnitude.

Uma questão em aberto relativamente à representação da magnitude de frações, é se estas são representadas de uma forma global e automática, ou através dos seus componentes, o numerador e denominador. Bonato e seus colaboradores (2007) propõem que o processamento de magnitudes em formato simbólico por adultos não é automático, mas sim resultado de uma construção envolvendo as magnitudes dos seus numeradores e denominadores. No seu estudo, os resultados de uma tarefa de comparação realizada por um grupo de adultos, mostraram que a decisão era influenciada pela distância entre os componentes da fração (numeradores e denominadores) e não pela magnitude global da fração, isto é, do valor numérico que a fração representava (Bonato et al, 2007). Por outro lado, Schneider e Siegler (2010) apontam a escolha das frações utilizadas como estímulos nos estudos anteriores como responsáveis pelos resultados obtidos. Na tarefa utilizada por Bonato e seus colaboradores (2007) as frações a comparar tinham o mesmo numerador, ou o mesmo denominador, o que colocou o foco da tarefa nos componentes da fração. Os estímulos parecem ter favorecido a estratégia de comparação que produziu tais resultados.

Também Sprute & Temple (2011), argumentam que num sistema cognitivo desenvolvido, há um acesso à magnitude global de uma fração. Utilizando também uma tarefa de comparação de frações, as autoras reportaram efeitos de distância nos tempos de reação e precisão de resposta, que apontam para a existência de representações da magnitude global de frações. Defendem ainda a importância da instrução das tarefas na precisão das representações de magnitudes de frações. Parece então que o acesso à magnitude global de uma fração é influenciado pelo tipo de frações usadas nas tarefas de comparação. Ainda, determinados paradigmas experimentais podem favorecer mais um tipo de processamento e trazer resultados aparentemente discrepantes entre estudos. Tarefas em que o desenho experimental limita a utilização de estratégias de cálculo, permitem uma caracterização isenta das representações.

1.4. Correlatos neuronais das representações de razões

Para além da sua influência na tomada de decisão, a capacidade de relacionar duas quantidades numéricas através de uma razão tem uma representação implícita no cérebro. Alguns estudos de neuroimagem e eletrofisiologia apresentam evidência para a existência de populações neuronais seletivas para determinadas proporções (e.g. Jacob & Nieder, 2009, Vallentim & Nieder, 2010).

No estudo de Jacob e Nieder (2009) foi usado um paradigma de adaptação neuronal com o objetivo de identificar regiões que participam na representação de frações (Grill-Spector et al., 1999). Este tipo de paradigma é utilizado para identificar regiões ativadas por determinado estímulo e suas propriedades e assenta no pressuposto de que quando um estímulo é apresentado repetidamente, se verifica uma redução gradual da ativação da população neuronal envolvida na sua codificação. Seguidamente, é apresentado um estímulo no qual a propriedade a estudar é alterada, o que leva a um restabelecimento da ativação. A intensidade deste restabelecimento é denominada por *rebound effect* (Piazza, Pinel, Le Bihan, & Dehaene, 2007).

Por exemplo, quando um participante é confrontado por conjuntos de pontos de dimensão próxima de vinte (dezassete, dezoito, dezanove) verifica-se uma diminuição de ativação em regiões cerebrais responsáveis pela codificação destas numerosidades. Quando posteriormente são introduzidos conjuntos de pontos com numerosidades desviantes, quarenta e oito por exemplo, é medida a intensidade da reativação (Piazza et al., 2007). A magnitude do *rebound effect* permite identificar regiões responsáveis pela representação de numerosidades e quantificar o grau de sobreposição das representações.

Neste estudo, Jacob e Nieder (2009) apresentaram aos participantes uma determinada proporção (1:5) representada por segmentos ou por conjuntos de pontos. Depois de uma habituação à proporção, eram apresentados estímulos com proporções desviantes: 2:5, 3:5, 4:5 e 5:5. Os autores encontraram padrões de restabelecimento de ativação (*rebound effect*) semelhantes nas duas notações (pontos e segmentos) no córtex pré-frontal e no córtex parietal bilateral. Verificaram também que este efeito estava correlacionado com o aumento da distância em relação à proporção à qual tinham sido adaptados. Estes resultados apontam para uma seletividade de certas populações neuronais para proporções específicas.

O processamento e representação de frações no cérebro foi também explorado por Ischebeck, Schocke e Delazer (2008) num estudo de neuroimagem que se propôs a correlacionar o efeito de distância numa tarefa de comparação entre frações com a atividade cerebral de participantes adultos. Os autores reportaram efeitos de distância a nível comportamental entre os numeradores das frações, entre os denominadores e entre o valor numérico das frações (distância global). No entanto, quando correlacionados com a ativação neuronal no sulco intraparietal, apenas a distância global das frações foi identificada como modeladora da ativação. Estes resultados apontam para uma representação da magnitude global de uma fração no cérebro. A influência da distância entre as frações na atividade do sulco intraparietal, sugere que mesmo que na realização de uma tarefa sejam processadas as magnitudes dos numeradores e denominadores das frações, há uma representação da sua magnitude global. Também nesta tarefa, a apresentação de pares de frações simultâneo poderá ter condicionado os resultados da tarefa.

O desempenho de primatas não humanos em tarefas de identificação de proporções oferece evidências da natureza filogenética da capacidade de representar uma razão de duas quantidades.

Num estudo de eletrofisiologia em macacos Rhesus, Vallentin e Nieder (2010) estudaram a capacidade destes de comparar razões, analisando a atividade dos neurónios do córtex pré-frontal e do lóbulo parietal inferior. Na tarefa proposta, o macaco via uma imagem que incluía dois segmentos representando uma certa proporção, enquanto segurava uma barra. De seguida, o macaco era confrontado com uma nova imagem com dois segmentos, devendo largar a barra caso a proporção apresentada fosse igual à primeira. Os autores encontraram diminuição da ativação de alguns neurónios do córtex pré-frontal e do lóbulo parietal inferior quando aumentava a distância em relação a uma determinada proporção. Esta diminuição suporta a ideia de seletividade de populações neuronais em relação a proporções específicas. Os macacos revelaram um sucesso de 85,56 % na tarefa o que evidencia que são capazes de reconhecer a relação entre as duas quantidades.

1.5. Desenvolvimento das representações de razões

No que diz respeito às representações de razões não simbólicas, alguns trabalhos mostram que as crianças em idade pré-escolar são capazes de raciocinar de forma análoga em situações contextualmente distintas, aplicando conceitos não aprendidos de proporção, por exemplo de metade ou um quarto, a uma pizza e a uma caixa de chocolates. (e.g. Singer-Freeman, & Goswami, 2001). Estes resultados mostram que crianças de três e quatro anos já evidenciam indícios de capacidades de raciocínio proporcional, conseguindo reproduzir quantidades relativas quando aspetos percetuais são alterados.

Mesmo admitindo a existência de uma capacidade inata para representar, de forma não simbólica a razão entre duas quantidades, a sua verbalização enquanto fração, a compreensão da magnitude que representa e a sua manipulação aritmética parecem ser campos em que as crianças atravessam dificuldades. As crianças conseguem estabelecer analogias entre pares de frações em formato não simbólico mas evidenciam, ao longo do percurso escolar, lacunas na precisão das representações simbólicas. Tomando o exemplo das crianças norte americanas, os dados do *National Assessment of Educational Progress* de 2007 (cit em Siegler, Thompson & Schneider, 2011) revelam que apenas 50% dos estudantes do 8ºano de escolaridade conseguem ordenar corretamente três frações. Uma possível explicação poderá originar na dificuldade em processar a representação simbólica de frações, isto é, de aceder à magnitude real da fração quando esta é apresentada de forma simbólica. As crianças muitas vezes são capazes de manipular as representações simbólicas em tarefas aritméticas, sem atribuir significado aos símbolos que manipulam (Siegler et al., 2011).

A maior dificuldade poderá residir na forma como as representações simbólicas de frações são mapeadas nas suas representações não simbólicas (Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013). Este mapeamento depende não só de fatores ligados ao desenvolvimento de algumas funções cognitivas, como por exemplo a memória de trabalho, mas também das estratégias que são utilizadas do ponto de vista do ensino formal de frações em contexto escolar. (Siegler, et al., 2013)

Neste sentido, são escassos os estudos que analisam o desenvolvimento representações simbólicas e não simbólicas de frações (Meert, Grégoire, Seron & Noël, 2012, Meert, Grégoire, Seron, & Noël, 2013).

A relação entre as representações simbólicas e não simbólicas de números fracionários foi explorada em estudos com participantes adultos (Meert et al., 2012) e com crianças em idades escolar (Meert et al., 2013).

Estes trabalhos procuraram testar o impacto da notação simbólica na capacidade de identificar uma magnitude. Na tarefa proposta em Meert et al (2013), crianças em idade escolar, de dois grupos experimentais: 9 anos e 11 anos, tinham de reproduzir uma determinada razão entre duas quantidades, completando um copo com a superfície equivalente à razão que se pretendia identificar. Esta razão vinha expressa em formato simbólico (e.g. 7/9) ou em formato não simbólico, como razão entre os pontos laranja e o total de pontos de uma figura apresentada. Nas razões em formato não simbólico, os autores controlaram a razão entre a área ocupada pelos pontos. Os resultados deste estudo mostraram uma melhoria do desempenho nos dois grupos com o aumento da magnitude da fração. Os autores verificaram também que melhores resultados no grupo de crianças de 11 anos, em relação ao grupo de crianças de 9 anos, em todas as condições. Verificaram-se ainda melhores resultados na experiência em formato simbólico do que em formato não simbólico.

As conclusões deste trabalho mostram que as crianças entre 9 e 11 anos de idade possuem já uma capacidade de processar a magnitude de frações, ainda que esta capacidade ainda sofra maturação neste intervalo de tempo, por motivos associados ao desenvolvimento e à escolarização. Os autores sugerem ainda que a aprendizagem de representações simbólicas de razões tem um impacto positivo nas representações não simbólicas, isto é, sugerem que depois de aprenderem em contexto escolar as representações simbólicas de razões, as crianças tendem a melhorar a precisão das representações não simbólicas.

A capacidade de aceder à magnitude de uma fração já foi apontada como preditor do sucesso na disciplina de matemática (Siegler et al 2012) e alguns trabalhos já procuraram estudar precisão das representações de frações com o sucesso em tarefas de cálculo escrito (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012, Fazio, Bailey, Thompson, & Siegler, 2014, Siegler et al., 2011).

Num estudo longitudinal, Bailey e seus colaboradores encontraram correlações entre a competência com frações com o desempenho na disciplina de matemática no ano seguinte de crianças de sexto ano, controlando as componentes ligadas a funções executivas, memória de trabalho e inteligência (Bailey et al., 2012). Em concordância, dados de um estudo de Siegler e seus colaboradores mostraram que a precisão das representações da magnitude de frações está fortemente relacionada com a proficiência em aritmética de frações e com os resultados de testes de matemática (Siegler et al., 2011). A análise da relação entre as representações de magnitude de números fracionários com o desempenho a matemática foi também abordada em Fazio e colaboradores (2014), que reportaram correlações entre as representações simbólicas e não simbólicas de magnitudes de números fracionários e o desempenho na disciplina de matemática. No seu conjunto, estes trabalhos apontam para a importância da precisão das representações de números fracionários no sucesso na aritmética de frações e na disciplina de matemática em geral, e sugerem que o desenvolvimento de estratégias de ensino que reforcem a precisão das representações poderá beneficiar a aprendizagem (Siegler et al., 2012).

Alguns trabalhos já procuraram correlações entre as representações de magnitude de números fracionários e o desempenho em aritmética de frações. A tarefa de comparação e classificação mesmo-diferente proposta em Gabriel & Szucs(2013), descrita anteriormente, incluiu um teste em papel de conhecimentos e aritmética de frações. Os autores reportaram correlações entre os efeitos de distância na tarefa de comparação e os resultados do teste em papel de conhecimentos e aritmética de frações. Também Siegler e seus colaboradores (2011) reportaram correlações entre o desempenho numa tarefa de comparação de frações e os resultados de testes de matemática envolvendo frações de crianças de 6º e 8ºano. No entanto, nenhum dos referidos trabalhos testou as representações da magnitude de números fracionários com base em formatos cruzados, isto é, formatos que relacionassem uma representação simbólica com uma representação não simbólica associada.

1.6. Contexto, objetivos e hipóteses do presente estudo

O objetivo do presente trabalho foi investigar o desenvolvimento das representações de razões associadas à escolarização e explorar as relações entre estas e o processamento associado à aritmética de frações.

Como referido anteriormente, a manipulação de números fracionários é uma área em que os alunos atravessam muitas dificuldades (Ball, 1993, Lamon, 2007) e as tarefas que envolvem ordenação e comparação de números representados na forma de fração apresentam taxas de erro elevadas (Siegler et al., 2011).

Dados de trabalhos de neurociência e neurobiologia sugerem a existência de um sistema biologicamente primário que permite aos seres humanos, e a algumas espécies animais compreender e processar uma magnitude relativa, quando representada em formato não simbólico.

Se o processamento não simbólico de razões assenta em bases inatas e independentes da linguagem e instrução, parece contraditório que a manipulação de representações simbólicas de razões acarrete tantas dificuldades.

Alguns autores (Siegler et al, 2013), justificam estas dificuldades com a insuficiente atribuição de significado a uma representação simbólica. As crianças (e até alguns adultos) não compreendem de forma eficaz os símbolos que manipulam.

São escassos os trabalhos que exploram as relações entre representações simbólicas e não simbólicas de razões (Meert et al, 2011, Meert et al, 2012) e a forma como o relacionamento destas representações afeta o desempenho aritmético ainda não foi investigado.

Daqui emergem as questões que este trabalho pretende explorar: (*i*) Quão precisas são as representações da magnitude de símbolos como 2/7, 5/6, ou 7/9 em crianças e adultos? (*ii*) Conseguem as crianças em idade escolar relacionar uma representação simbólica de uma fração com uma representação não simbólica? (*iii*) Como é que esta capacidade evolui ao longo do percurso escolar? (*iv*) Que repercussões têm estas representações na destreza aritmética?

Para responder a estas questões, foi utilizada uma tarefa de classificação mesmo-diferente com frações. Esta tarefa consistiu na identificação de pares de frações que correspondessem à mesma quantidade e incluiu uma sub-tarefa em formato simbólico e uma sub-tarefa que cruzou dois formatos simbólico e não simbólico. Devido a limitações em controlar variáveis relacionadas com semelhanças visuais, não foi incluída uma sub-tarefa em formato unicamente não simbólico.

Foi ainda aplicado um teste sobre aritmética e compreensão de frações, com o objetivo de correlacionar o desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente com as competências matemáticas.

Pretendeu-se com esta abordagem estudar diferenças no desempenho e nos efeitos de distância nos formatos simbólico e não simbólico para caracterizar as suas representações. Foram também incluídos pares de frações equivalentes, isto é frações que representando a mesma magnitude têm representações simbólicas diferentes (e.g.3/4 e 6/8). Com esta inclusão pretendeu-se estudar a capacidade de relacionar diferentes representações simbólicas da mesma magnitude.

Procurou-se também utilizar diferenças no desempenho e os efeitos de distância no formato cruzado para identificar como é que as duas representações se relacionam, isto é, avaliar a eficácia do mapeamento entre as representações não simbólicas e simbólicas. Sendo o efeito de distância um marcador comportamental para caracterizar a presença de representações de magnitudes numéricas, a comparação dos seus valores nos diferentes grupos permite estudar a evolução das representações.

Com a inclusão de três grupos de participantes: dois grupos de crianças – 5º ano e 7º ano e um grupo de adultos, pretendeu-se identificar as diferenças na precisão das representações, resultantes do desenvolvimento e da escolarização. É expectável que os resultados do grupo de participantes de 7º ano sejam melhores que os resultados do grupo de crianças de 5º ano. São esperadas ligeiras diferenças nos resultados do grupo de crianças de 7º ano e do grupo de adultos.

O desenho da tarefa de classificação mesmo-diferente visou desencorajar a utilização de estratégias de cálculo, de forma a fornecer uma caracterização fidedigna da representação da magnitude das frações.

Poucos são os estudos que procuram relações entre as representações simbólicas e não simbólicas de frações pelo que a utilização de um formato cruzado na tarefa de classificação mesmo-diferente permitiu uma nova abordagem a esta problemática.

Espera-se que uma maior precisão nas representações de números fracionários esteja associada a uma maior destreza em exercícios de matemática, em particular no domínio da aritmética de frações.

2. Método

2.1 Participantes

Participaram na experiência dois grupos de crianças do 5º e 7º anos de escolaridade e um grupo de adultos.

Foram recrutados quarenta e sete participantes adultos do Mestrado Integrado em Psicologia da Faculdade de Psicologia da Universidade de Lisboa, com idades compreendidas entre 18 e 32 anos ($\bar{x} = 19{,}5$), dos quais quarenta e três eram do sexo feminino. Neste grupo, quarenta e cinco participantes indicaram a mão direita como dominante para a escrita. A sua participação foi recompensada com créditos numa disciplina. Os grupos de crianças foram recrutados de escolas dos concelhos de Cascais, Oeiras e Amadora. O grupo de Crianças do 7º ano incluiu dezoito participantes com idades compreendidas entre os 12 e os 15 anos ($\bar{x} = 12{,}94$), dos quais cinco eram do sexo feminino. Todos os participantes deste grupo indicaram a mão direita como mão dominante para a escrita. O grupo de Crianças do 5º ano incluiu trinta e cinco participantes com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos ($\bar{x} = 10{,}74$), dos quais dezanove eram do sexo feminino

Os encarregados de educação dos participantes menores receberam uma descrição escrita da experiência e autorizaram a participação do seu educando. O estudo foi aprovado pela comissão de deontologia da faculdade de psicologia.

2.2 Materiais

Cada participante realizou duas tarefas de classificação mesmo-diferente em formato computorizado, e um teste sobre conhecimentos de frações, em papel. A ordem de realização destas tarefas foi pseudo-aleatória, sendo que metade dos participantes realizaram primeiro as tarefas de classificação mesmo-diferente e a outra metade realizou primeiro o teste de conhecimentos de frações. A ordem de realização das tarefas mesmo-diferente foi pseudo-aleatorizada.

Tarefa de classificação mesmo-diferente

Cada participante realizou duas tarefas de classificação mesmo-diferente em cujos estímulos foram frações, apresentadas sequencialmente: (1) Tarefa em notação simbólica, na qual foram apresentados pares de frações representadas como quociente de dois números naturais (ex. 3/4). (2) Tarefa em notação cruzada, na qual foram apresentados pares de frações, uma representada por notação simbólica e outra por notação não simbólica representada graficamente, por meio de um círculo com uma parte preenchida. Em metade dos ensaios desta tarefa, a 1ª fração foi de notação não simbólica e a 2ª fração de notação simbólica, e na outra metade as frações foram apresentadas de forma inversa (ver figura 2.1).

Figura 2.1:Ilustração dos estímulos em formato simbólico e não simbólico da tarefa de classificação mesmo-diferente

As frações utilizadas em todas as tarefas de classificação mesmo-diferente foram frações inferiores à unidade, que tiveram como numeradores números naturais superiores a 1 e inferiores a 9, e como denominadores números naturais superiores a 2 e inferiores a 9. Os pares de frações em notação simbólica foram, em cada ensaio, apresentados em dois tipos de letra e em dois formatos diferentes (ver figura 2.1) para evitar que os participantes baseassem a sua comparação em semelhanças físicas dos estímulos.

A combinação dos pares de frações foi definida de forma a incluir as seguintes condições experimentais: (1) Mesmo identidade – Frações que representam a mesma quantidade e cujos numeradores e denominadores são iguais (por exemplo 3/4 e 3/4) (2) mesmo equivalente - Frações que representam a mesma quantidade e cujos numeradores e denominadores são diferentes (por exemplo 3/4 e 6/8); (3) Diferente próximo- Frações que representam quantidades distintas cujo valor numérico esteja separado por uma distância compreendida entre 0,03 e 0,23 (exemplo 2/7 e 3/4). (4) Diferente distante - Frações que representam quantidades distintas cujo valor numérico esteja separado por uma distância compreendida entre 0,46 e 0,63.

Os pares de frações foram selecionados para que a distância entre numeradores estivesse fracamente correlacionada com a distância entre a magnitude das duas frações, evitando assim que a comparação fosse feita com base nos numeradores da fração e não na magnitude da fração. A análise da correlação entre a distância entre as frações e a distância entre os numeradores mostrou uma correlação fraca (r = 0,205, p=0.052), A análise da correlação entre a distância entre as frações e a distância entre os denominadores mostrou uma correlação negativa fraca (r = -,186, p =,141).

A mesma combinação de pares de frações foi utilizada nas duas tarefas. (ver lista completa dos estímulos no Anexo I).

Teste de conhecimentos de frações

Os participantes neste estudo realizaram um conjunto de exercícios de papel e lápis sobre aritmética de frações. (ver conjunto de exercícios anexo II).

O conjunto de exercícios em papel foi adaptado do teste utilizado em Gabriel e Szucs (2013) e incluiu tarefas de identificação de frações através de representações pictóricas, exercícios de comparação e leitura de frações em retas graduadas, exercícios com frações equivalentes e operações com frações.

2.3 Plano experimental

A tarefa de classificação mesmo-diferente assentou sobre um desenho experimental com uma variável independente inter-participantes - Grupo de escolarização (Crianças de 5º ano, Crianças de 7ºano, Adultos). Para os ensaios da condição "mesmo" foi definida a variável independente intra-participantes - tipo de ensaio (Identidade vs. Equivalente). Para os ensaios da condição "diferente" foi definida a variável independente intra-participantes - distância (próximo vs. distante).

Na tarefa em notação cruzada, o desenho experimental incluiu adicionalmente outra variável - ordem de apresentação (Simbólico - Não simbólico vs. Não Simbólico - Simbólico).

2.4 Procedimento

Tarefa de Classificação mesmo- diferente

Cada participante realizou as duas tarefas de classificação mesmo-diferente em ordem pseudo-aleatória.

Em cada tarefa, os participantes foram instruídos para premir o mais rápido e acertadamente possível as teclas “s” e “l” consoante as frações apresentadas sequencialmente representassem a mesma quantidade ou não. Para metade dos participantes, a tecla “s” correspondia à resposta afirmativa e “l” a resposta negativa. Para os restantes participantes a correspondência foi invertida.

Cada participante completou 20 ensaios de treino, seguidos de um total de 192 ensaios experimentais (48 *mesmo equivalente*, 48 *mesmo identidade*, 48 *diferente próximo*, 48 *diferente distante)* selecionados de forma aleatória, separados em dois blocos de igual composição. Dos 48 ensaios realizados por cada condição, 32 foram analisados e 16 foram utilizados como *fillers.*

Cada par de frações foi apresentado no centro de um monitor ligado a um computador, usando E-Prime® (Psychology Software Tools, Inc.). Os estímulos foram apresentados sequencialmente para limitar interferência de processos preceptivos (como a comparação da semelhança visual entre os estímulos) e ocuparam uma área de aproximadamente 40 cm^2.

Cada ensaio começou com a apresentação de um ponto de fixação centrado no ecrã durante 300 milissegundos (ms), seguido de um ecrã em branco durante 200 ms, seguido da apresentação da primeira fração por 500 ms. Após a primeira fração seguiu-se a apresentação de outro ecrã em branco por 200 ms, depois do qual era apresentada a segunda fração que permanecia no ecrã até o participante responder, ou por um período máximo de 5 segundos. Depois da resposta ou dos 5 segundos de espera, surgia outro ecrã em branco, o qual permanecia durante 1 segundo antes de começar ensaio seguinte (*cf* Figura 2.2).

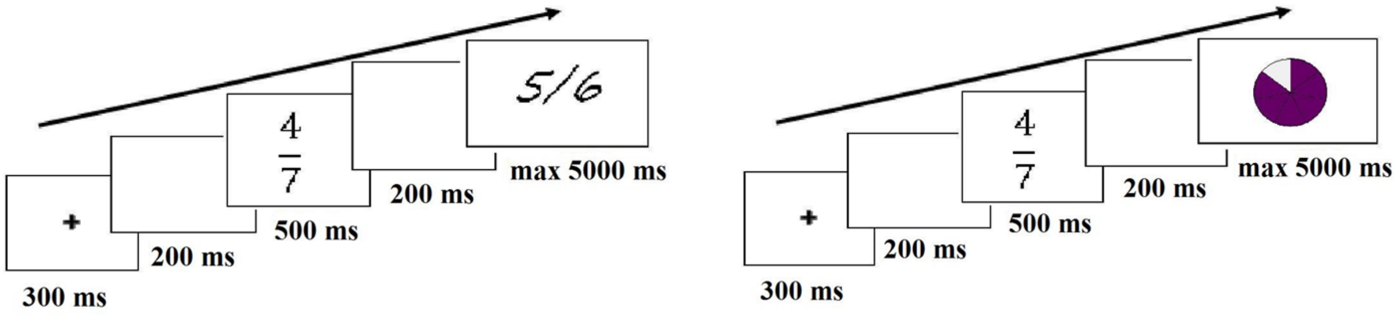


Figura 2.2- Ilustração de ensaios da tarefa e classificação mesmo-diferente em notação simbólica (esquerda) e em notação cruzada (direita).

Na tarefa em notação cruzada, em metade dos ensaios a primeira fração apresentada era a fração em formato não simbólico e a segunda em formato simbólico – *ordem não simbólica – simbólica.* Na restante metade, a ordem era a inversa - *ordem simbólica – não simbólica*

Em cada experiencia, os ensaios foram selecionados de forma aleatória em dois blocos de 96 ensaios, separados de uma pausa.

Teste de conhecimento de frações

Os participantes realizaram o teste sem recurso a calculadora, dispondo de um máximo de vinte minutos para a sua realização.

2.5 Análise

A análise estatística dos resultados teve três objetivos principais: Explorar a capacidade de discriminar magnitudes de frações nos diferentes grupos de escolarização; caracterizar a manifestação do efeito de distância nos três grupos e analisar correlações dos resultados da tarefa de classificação mesmo-diferente com as classificações do teste de conhecimento de frações.

Para a análise dos resultados da tarefa de classificação mesmo-diferente foi calculada uma medida de deteção de sinal, *d'* (dee-prime) (Macmillan & Creelman, 2005). A razão prende-se com o facto de a tarefa de classificação mesmo-diferente entre frações proposta no presente estudo, envolver uma decisão dicotómica e por essa razão estar exposta a ruído. Nesta tarefa, a distribuição do sinal (isto é, dos ensaios em que o participante reconhece corretamente congruência ou incongruência das duas magnitudes) sobrepõe-se parcialmente com a distribuição do ruído (isto é, dos ensaios em que o participante não reconhece a congruência ou incongruência das duas magnitudes). Como ilustra a figura 2.3, a medida *d'* caracteriza o distanciamento das duas curvas.

Esta medida fornece informação da separabilidade das curvas de distribuição normal dos acertos e dos falsos alarmes (*d'* = Z(H) – Z(FA),) possibilitando assim uma caracterização da discriminabilidade dos estímulos.

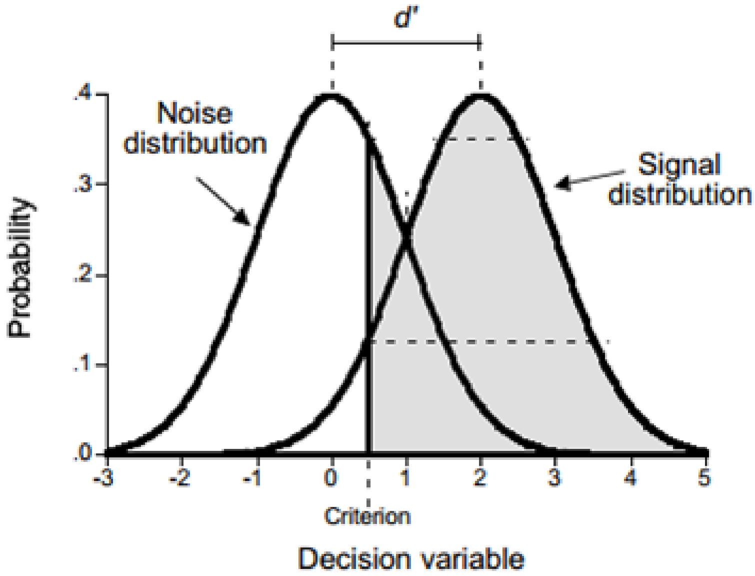


Figura 2.3- Distribuição de Sinal e ruído na tomada de decisão (adaptado de Stanislaw & Todorov, 1999)

Foi calculada a medida *d'* para cada condição experimental e para cada participante. Foram excluídos os participantes cujos valores de *d'* fossem inferiores a um em mais do que duas condições experimentais.

Para comparar a taxa de acertos na tarefa de classificação mesmo-diferente com o nível do acaso, foram conduzidos testes t-student, para cada grupo e condição experimental, comparando a taxa de acertos com o valor 0.5.

Pela mesma razão, foram também conduzidos testes t-student, para cada grupo e condição experimental, comparando os valores de *d'* com o valor 0 (correspondendo ao nível do acaso).

Para comparar o desempenho geral dos três grupos de participantes foram conduzidas análises de variância de medidas repetidas (ANOVAs) entre as médias de precisão das respostas dadas pela variável *d'*.

Para a tarefa em notação simbólica, foram estudadas separadamente as condições "diferente" e "mesmo", em consequência de dois dos objetivos do presente estudo: Estudar os efeitos de distância, na condição diferente, e estudar a capacidade de relacionar diferentes representações simbólicas da mesma magnitude, na condição mesmo. Para a condição mesmo, foram conduzidas ANOVAs de medidas repetidas para estudar os efeitos principais e efeitos de interação entre os três grupos de participantes (crianças de 5º ano, crianças de 7º ano e Adultos) e tipo de ensaio (identidade ou equivalente). Para a condição "diferente", foram conduzidas ANOVAs com medidas repetidas para estudar os efeitos principais e efeitos de interação entre os três grupos de participantes (crianças de 5º ano, crianças de 7º ano e Adultos) e distância (próximo ou distante).

Para a tarefa em notação cruzada foram também estudadas separadamente as condições "mesmo" e "diferente". Para a condição "mesmo", foram conduzidas ANOVAs com medidas repetidas para estudar os efeitos principais e efeitos de interação entre os três grupos de participantes (crianças de 5º ano, crianças de 7º ano e Adultos), tipo de ensaio (identidade ou equivalente) e ordem de apresentação (Não simbólica – Simbólica ou Simbólica – Não simbólica).

Com o objetivo de estudar o efeito de distância, foi calculada uma medida da magnitude do efeito de distância, $\Delta d'$, definida pela diferença entre os valores de *d'* da condição distante e da condição próximo, para ambas as tarefas - em notação simbólica e cruzada. Foram conduzidas análises de Variância (ANOVAs) com medidas repetidas com os valores de $\Delta d'$.

Para as ANOVAs conduzidas, as comparações múltiplas foram realizadas recorrendo ao teste de Bonferroni. O nível de significância foi estabelecido para 5%.

O teste de conhecimento de frações foi avaliado em percentagem (0-100). As perguntas do teste foram divididas em duas categorias principais – categoria conceptual e categoria de compreensão de magnitudes. Cada uma das categorias correspondeu a 50% da cotação do teste. Foram conduzidas análises de Variância (ANOVAs) com medidas repetidas para estudar os efeitos principais e efeitos de interação entre os três grupos de participantes (crianças de 5º ano, crianças de 7º ano e Adultos) e a categoria do teste.

Foram ainda estudadas correlações bivariadas de *Pearson* entre as seguintes medidas: média dos valores de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica, média de *d'* na tarefa classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Não Simbólica – Simbólica, média de *d'* na tarefa classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Simbólica –Não Simbólica, Δ*d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica, Δ*d'* na tarefa classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Não Simbólica –Simbólica, Δ*d'* na tarefa classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Simbólica –Não Simbólica, resultado do teste de conhecimentos de frações, resultado da categoria de compreensão de magnitudes do teste de conhecimentos de frações, resultado da categoria de conceptual do teste de conhecimentos de frações.

3. Resultados

A análise de resultados incidiu sobre a precisão das respostas na tarefa de classificação mesmo-diferente e sobre o desempenho no teste de conhecimentos de frações. Especificamente, foram analisadas as taxas de acerto e as médias dos valores de *d'* nas várias condições experimentais da tarefa de classificação mesmo-diferente. Foi também analisada a diferença entre os valores de *d'* na condição distante e na condição próximo, através da medida $\Delta d'$. Adicionalmente, exploraram-se as correlações entre o desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente e os resultados do teste de conhecimentos de frações.

Foram excluídos da análise os participantes que apresentaram valores de *d'* abaixo de 1 em mais de metade das condições experimentais. De forma a evitar discrepâncias na dimensão dos três grupos de escolarização, foram ainda excluídos, de forma aleatória, dez participantes do grupo de adultos. Assim, o grupo de participantes de adultos incluiu vinte e oito participantes, o grupo de participantes de crianças de 7ºano incluiu quinze participantes e o grupo de crianças de 5º ano incluiu vinte e oito participantes.

Primeiramente, foram conduzidos testes-t para comparar a taxa de acertos na tarefa de classificação mesmo-diferente para cada grupo de escolarização, com o nível do acaso, que correspondeu ao valor 0.5.

A tabela A (ver Apêndice I), inclui médias de taxa de acertos e respetivos valores de significância dos testes-t conduzidos, para os resultados de cada uma das condições experimentais. Todas as condições apresentaram taxas de acertos significativamente acima de 0.5, à exceção de duas condições experimentais: mesmo - equivalente, ordem não simbólica – simbólica no grupo de participantes adultos e mesmo - equivalente, ordem simbólica – não simbólica no grupo de participantes de crianças de 5º ano.

Foram também conduzidos testes-t para comparar os valores de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente para cada grupo de escolarização, com o nível do acaso, o que corresponde ao valor zero.

A tabela B (ver Apêndice I) inclui médias de valores de *d'* e respetivos valores de significância dos testes-t conduzidos, para os resultados de cada uma das condições experimentais. Todas as condições experimentais apresentaram valores de *d'* significativamente superiores a zero.

3.1. Tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica

3.1.1 Ensaios da condição "diferente"

A figura 3.1 ilustra os valores de *d'* para os três grupos de participantes, nas condições experimentais próximo e distante. Foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) de medidas repetidas com uma variável intra-participantes (distância com dois níveis: próximo *vs* distante) e uma variável inter-participantes (grupo com três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano). Observou-se um efeito principal de distância ($F(1,68) = 19.9$, $p < .001$), sendo que os valores de *d'* na condição distante ($\bar{x} \approx 2.888$) foram significativamente superiores do que na condição próximo ($\bar{x} \approx 2.604$). Verificou-se também um efeito de grupo ($F(2,68) = 7.8$, $p = .003$). De acordo com o teste *post hoc* HSD de Tukey, o grupo de adultos ($\bar{x} \approx 3.200$) revelou desempenho significativamente melhor que o grupo de crianças de 7º ano ($\bar{x} \approx 2.505$) e que o grupo de crianças de 5º ano ($\bar{x} \approx 2.533$). Não se verificaram diferenças significativas entre os grupos de crianças. Apesar de não se registarem interações significativas entre as variáveis grupo e distância, o teste *post hoc* com correção de Bonferoni revelou que o efeito foi apenas significativo nos grupos de adultos ($p = .006$) e crianças de 7ºano ($p = .001$).

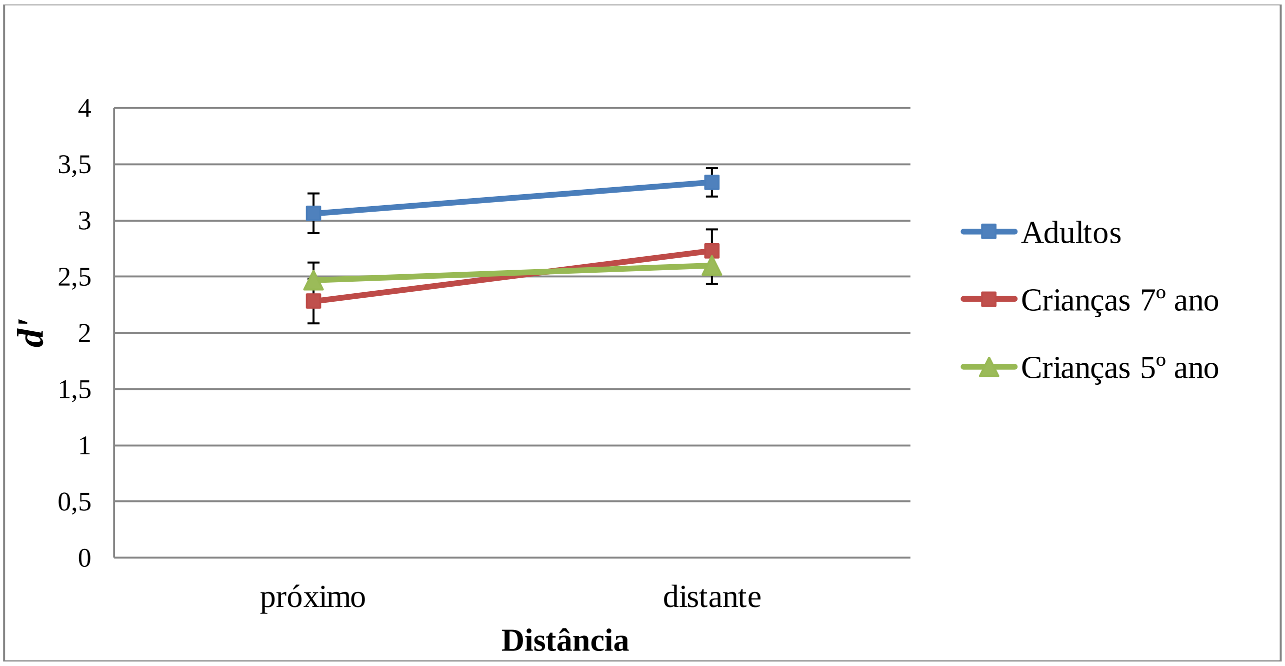


Figura 3.1: Média (e erro padrão) dos valores de *d'* para as condições experimentais próximo e distante, por grupo, na tarefa de notação simbólica.

3.1.2 Ensaios da condição "mesmo"

A figura 3.2 ilustra os valores de *d'* para os três grupos de participantes, nas condições experimentais identidade e equivalente. Foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) de medidas repetidas com uma variável intra-participantes (com dois níveis: identidade vs equivalente) e uma variável inter-participantes (grupo de escolarização com três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano). Foi encontrado um efeito de tipo de ensaio ($F(1,68) = 44.5$, $p < .0001$) sendo os valores de *d'* na condição identidade $(\bar{x} \approx 3.138)$ significativamente superiores ao valores de *d'* na condição equivalente $(\bar{x} \approx 2.500)$. Verificou-se ainda um efeito principal de grupo ($F(2,68) = 7.464$, $p = .001$). De acordo com o teste *post hoc* HSD de Tukey, o grupo de adultos $(\bar{x} \approx 3.315)$ registou valores de *d'* significativamente superiores ($p = .009$) aos registados no grupo de crianças de 7º ano $(\bar{x} \approx 2.539)$ e também significativamente superiores ($p = .003$) aos registados no grupo de crianças de 5º ano $(\bar{x} \approx 2.603)$. Não se verificaram diferenças significativas entre os grupos de crianças. Não foram encontradas interações significativas entre as variáveis em estudo.

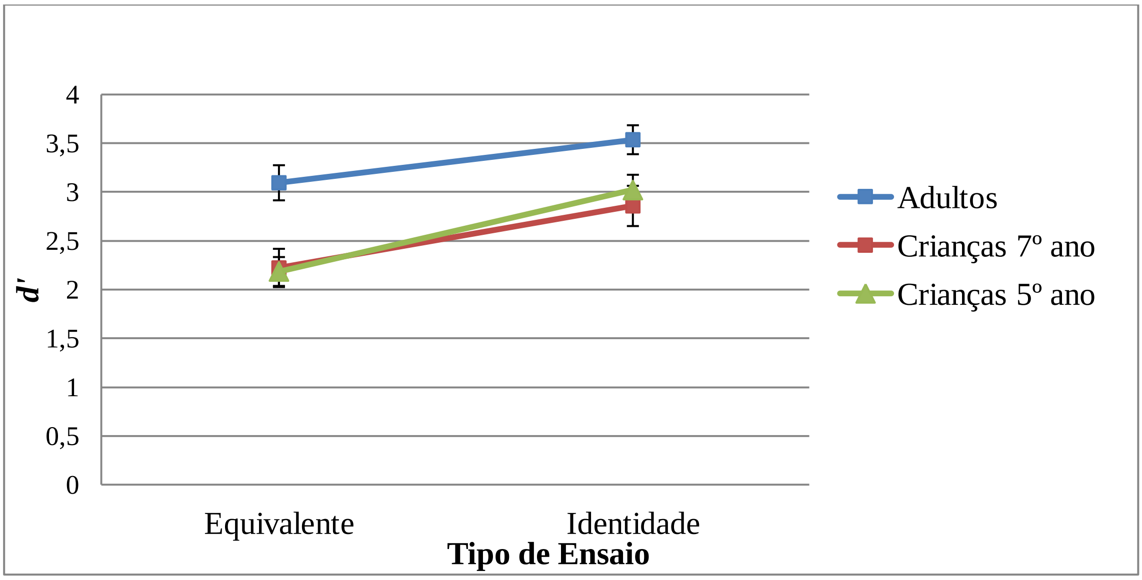


Figura 3.2: Média (e erro padrão) dos valores de *d'* para as condições experimentais identidade e equivalente por grupo, na tarefa de notação simbólica.

3.2. Tarefa de classificação mesmo-diferente em Notação Cruzada

3.2.1 Ensaios da condição diferente

A figura 3.3 ilustra os valores de *d'* para os três grupos de participantes, nas condições experimentais próximo e distante. Foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) de medidas repetidas com duas variáveis intra-participantes (ordem de apresentação, com dois níveis: Não simbólico – Simbólico vs Simbólico - Não simbólico e distância com dois níveis próximo *vs* distante) e uma variável inter-participantes (grupo de escolarização com três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano).

Observou-se um efeito de grupo ($F(2,68) = 8,79$, $p < .001$). De acordo com o teste *post hoc* HSD de Tukey, o grupo de adultos $(\bar{x} \approx 1.751)$ apresentou valores significativamente superiores (p = .010) em relação ao grupo de crianças de 7º ano, $(\bar{x} \approx 1.131)$ e também significativamente superiores (p = .001) em relação ao grupo de crianças de 5º ano $(\bar{x} \approx 1.090)$. Não se verificaram diferenças significativas entre os grupos de crianças.

Foi encontrado um efeito de distância (F(1,68) = 9,822, p = .003), sendo que os valores de *d'* na condição distante ($\bar{x} \approx 1.427$) foram significativamente superiores aos valores registados na condição próximo ($\bar{x} \approx 1.222$).

A figura 3.4 ilustra os valores de *d'* para os três grupos de participantes, nas duas ordens de apresentação.

Observou-se um efeito principal de ordem (F(1,68) = 18.474, p < .001), que se manifestou em melhores resultados na ordem Simbólica - Não simbólica $(\bar{x} \approx 1.458)$ do que na ordem Não simbólica - Simbólica $(\bar{x} \approx 1.191)$.

Foi ainda observada uma interação entre a as varáveis distância e grupo (F(2,68) = 4.620 , p = .013) . Verificou-se uma influência do grupo de escolarização na manifestação do efeito de distância, que foi, segundo o teste *post hoc* de Bonferonni, apenas significativo no grupo de adultos (F(1,68) = 18.245, p <.001).

Foi encontrada uma interação entre as varáveis ordem e grupo (F(2,68) = 4.018 , p = .022) que se traduziu numa manifestação significativa do efeito de ordem apenas nos grupos de adultos (p < .001) e crianças de 7º ano (p = .028).

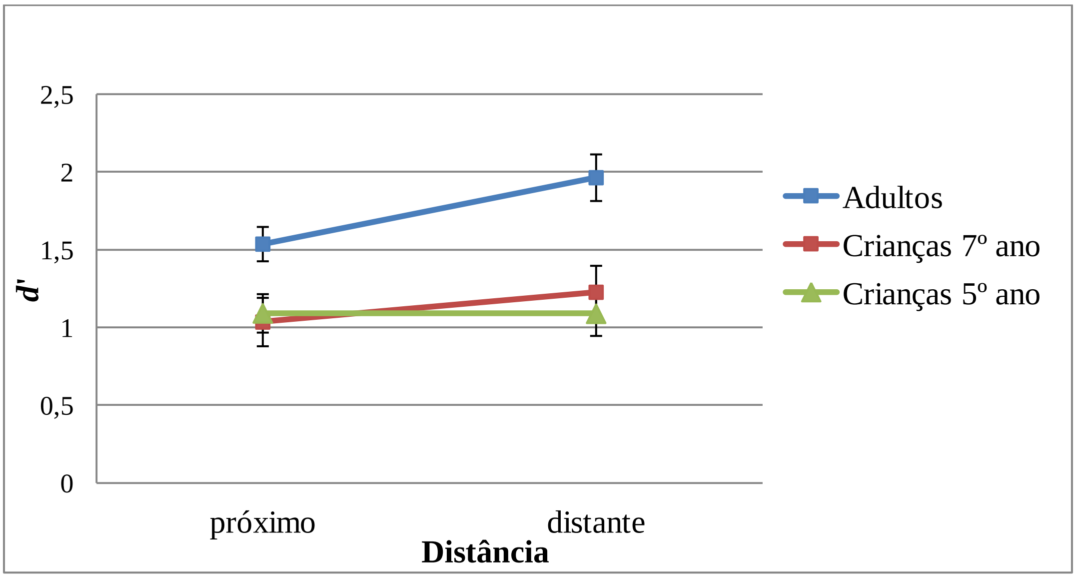


Figura 3.3: Média (e erro padrão) dos valores de *d'* para as condições experimentais próximo e distante, por grupo de escolarização

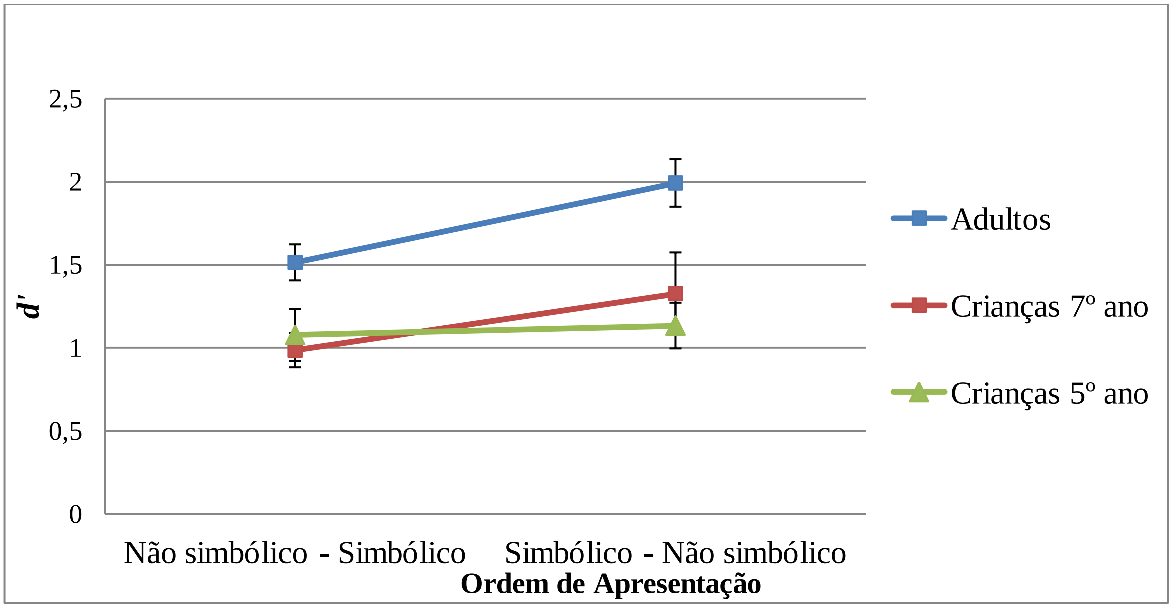


Figura 3.4: Média (e erro padrão) dos valores de *d'* para as duas ordens de apresentação, por grupo de escolarização.

3.2.2 Ensaios da condição "mesmo"

Foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) de medidas repetidas com duas variáveis intra-participantes (ordem de apresentação, com dois níveis: Não simbólico – Simbólico vs Simbólico - Não simbólico; e tipo de ensaio com dois níveis identidade vs equivalente) e uma variável inter-participantes (grupo com três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano).

Observou-se um efeito principal de ordem ($F(1,68) = 20.494$, $p < .001$), com a ordem Simbólica-Não simbólica $(\bar{x} \approx 1.483)$ a registar resultados significativamente superiores do que a ordem Não simbólica-simbólica $(\bar{x} \approx 1.191)$.

Observou-se um efeito de grupo ($F(2,68) = 7.909$, $p = .001$). De acordo com o teste *post hoc* HSD de Tukey, o grupo de adultos $(\bar{x} \approx 1.752)$ apresentou valores significativamente superiores ($p = .017$) em relação ao grupo de crianças de 7º ano, $(\bar{x} \approx 1.155)$ e também significativamente superiores ($p = .001$) em relação ao grupo de crianças de 5º ano $(\bar{x} \approx 1.105)$. Não se verificaram diferenças significativas entre os grupos de crianças.

A figura 3.5 ilustra os valores de *d'* para os três grupos de participantes, nas condições experimentais identidade e equivalente. Observou-se ainda um efeito de tipo de ensaio

(F(1,68) = 21.897 , $p < .001$), correspondendo a valores superiores de *d'* na condição identidade $(\bar{x} \approx 1.544)$ relativamente à condição equivalente $(\bar{x} \approx 1.131)$.

Foi encontrado um efeito de interação entre as variáveis ordem e grupo (F(2,68) = 4.712 , p =.012) que se traduziu numa manifestação significativa do efeito de ordem apenas nos grupos de adultos e crianças de 7º ano, que apresentaram valor mais altos de *d'* na ordem Simbólica-Não Simbólica relativamente à ordem não simbólica-simbólica. A figura 3.6 ilustra os valores médios de cada grupo de participantes nos ensaios das duas ordens de apresentação, para a condição experimental "mesmo".

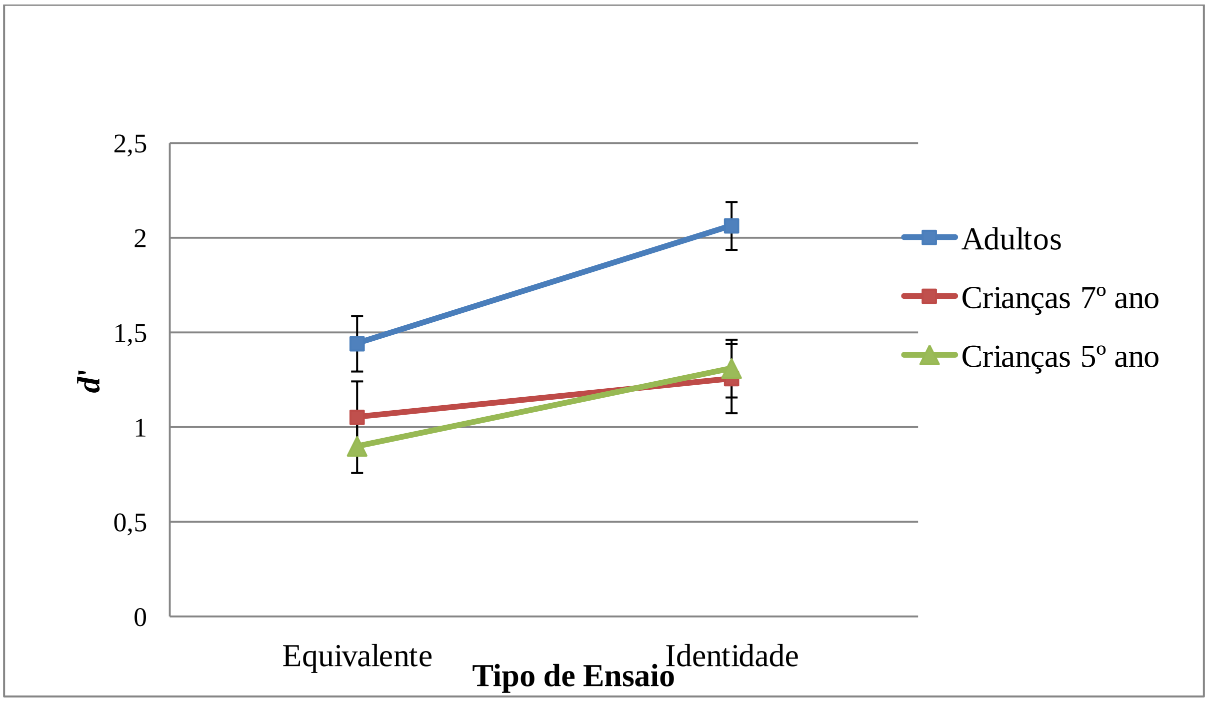


Figura 3.5: Média (e erro padrão) dos valores de *d'* para os ensaios de cada grupo de participantes, para cada tipo de ensaio, para a condição experimental "mesmo".

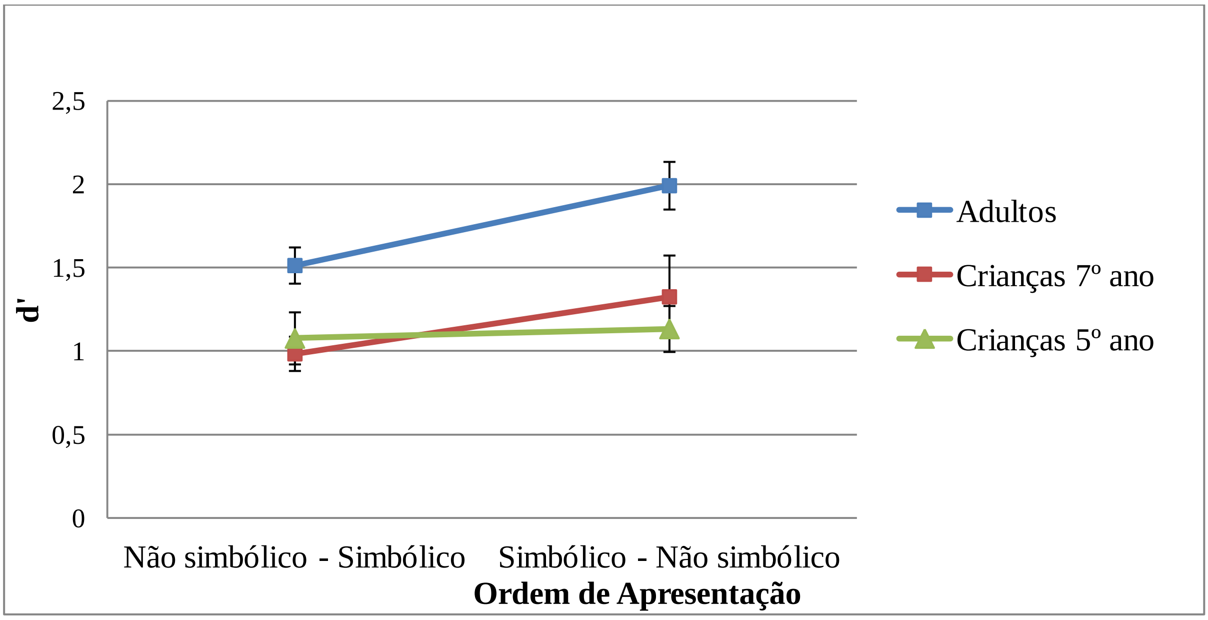


Figura 3.6: Média (e erro padrão) dos valores de *d'* para os ensaios de cada grupo de escolarização, para cada ordem de apresentação, para a condição experimental "mesmo".

3.3. Efeito de distância

Para a análise do efeito de distância em cada grupo de escolarização e para cada participante, foi utilizada a medida *Δd'*, que corresponde à diferença entre os valores de *d'* das condições distante e próximo. Foram conduzidas análises de variância (ANOVAs) nas tarefas em notação simbólica e cruzada.

3.3.1 – Tarefa em notação simbólica

Foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) em relação aos valores de Δ*d'*, tendo grupo como variável inter-participantes (três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano). A tabela C (ver em Apêndice I) indica a média de valores de Δ*d'* nos três grupos de participantes. Nesta tarefa, não foram encontradas diferenças significativas nos valores de Δ*d'* entre os três grupos. No entanto, a comparação apenas entre os dois grupos de crianças revela diferenças significativas ($F(2,68) = 5.155$, $p = .029$) entre os valores de $\Delta d'$, com o grupo de crianças de 7ºano a registar valores de $\Delta d'$ significativamente superiores aos registados no grupo de crianças de 5º ano.

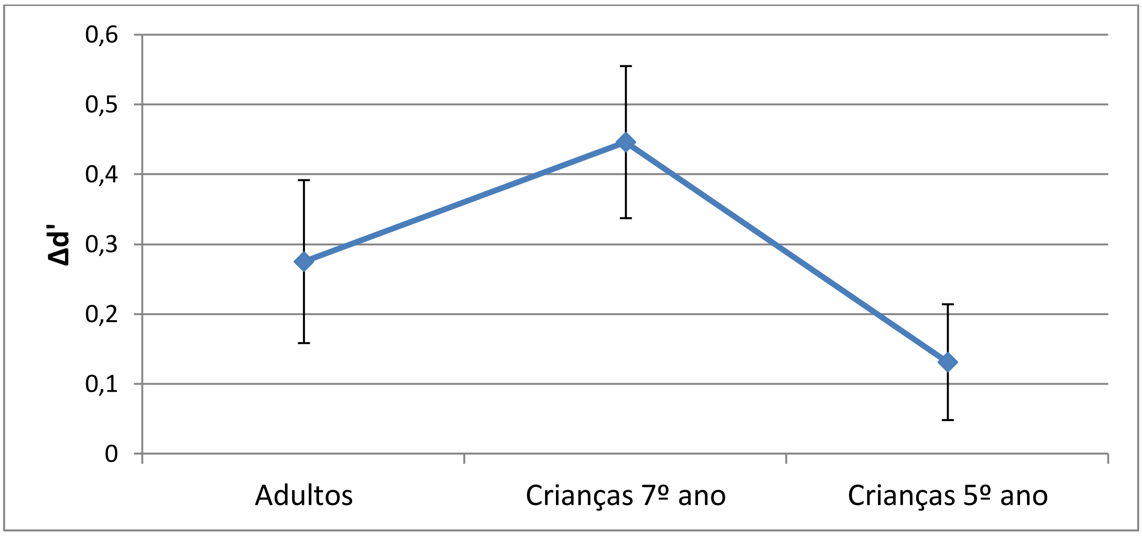


Figura 3.7: Média (e erro padrão) dos valores de $\Delta d'$, para na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica.

3.3.2 - Tarefa em notação cruzada

Foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) em relação aos valores de $\Delta d'$, tendo grupo como variável inter-participantes (três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano) e ordem de apresentação como variável intraparticipantes (dois níveis: Não simbólica – Simbólica vs Simbólica - Não simbólica),

Observou-se um efeito de grupo ($F(2,68)=4.6$, $p= .013$) . A média da medida $\Delta d'$ no grupo de adultos $(\bar{x} \approx 0.427)$ foi significativamente superior ($p=.013$) à média desta medida no grupo de crianças de 5º ano $(\bar{x} \approx -.002)$. Não se observaram diferenças significativas entre as médias de $\Delta d'$ do grupo de adultos e do grupo de crianças de 7º ano $(\bar{x} \approx .191)$. Também não se observaram diferenças significativas entre as médias de $\Delta d'$ dos grupos de crianças.

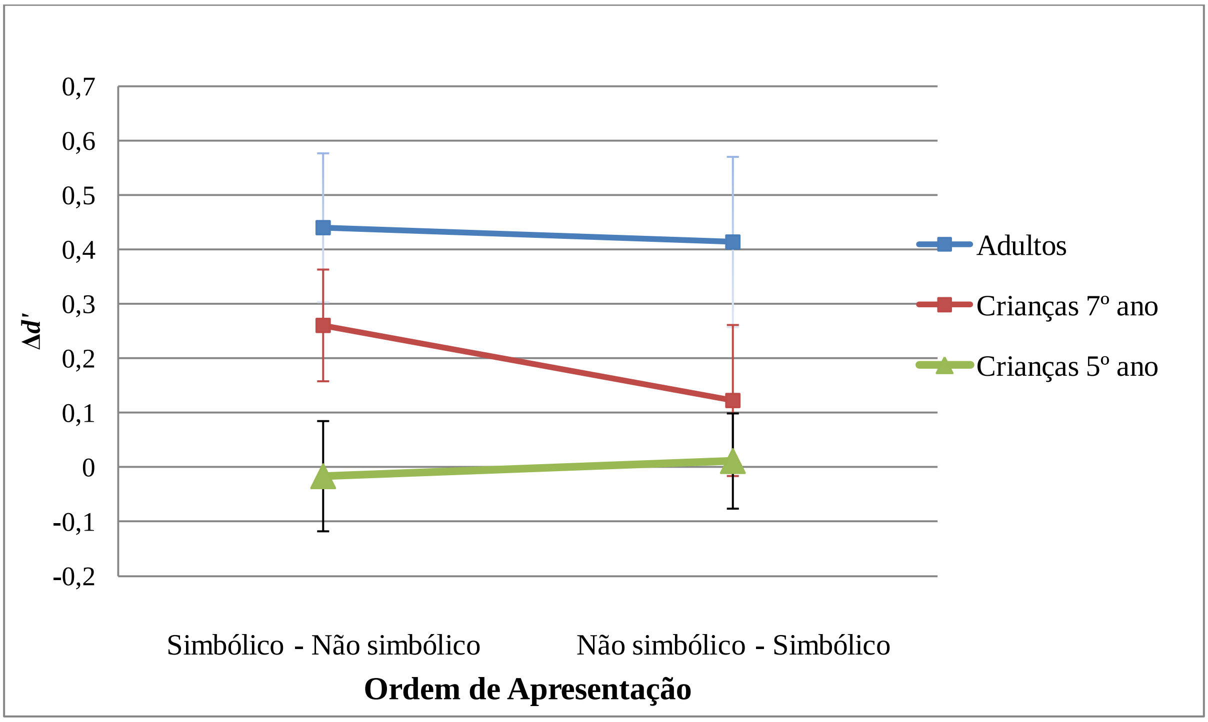


Figura 3.8: Média e erro padrão valores de *Δd*' , para as duas ordens de apresentação, por grupo.

3.4 Resultados das classificações do teste de conhecimento de frações

Para comparar as classificações do teste de conhecimentos de frações nos três grupos de participantes foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) em relação às classificações, tendo grupo como variável inter-participantes (três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano).

A figura 3.9 ilustra a média (e erro padrão) das classificações do teste de conhecimentos de frações por grupo. Não foram encontradas diferenças significativas entre as classificações dos três grupos de participantes ($F(2,68)= .310$, $p = .735$).

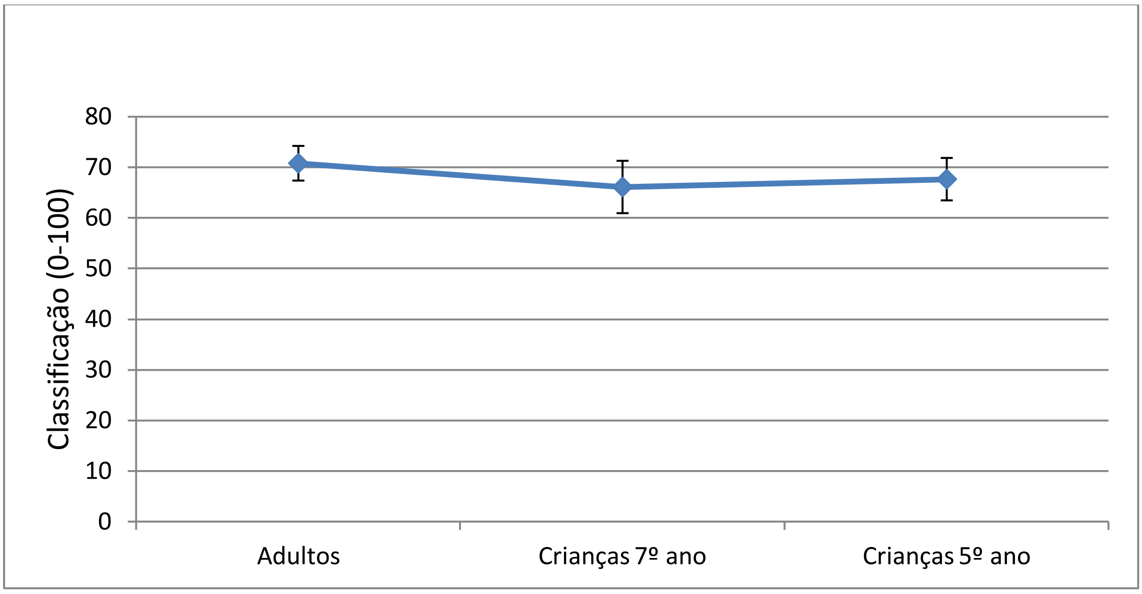


Figura 3.9: Média (e erro padrão) das classificações, em percentagem, no teste de conhecimentos de frações, por grupo de participantes.

Foi conduzida uma análise de variância (ANOVA) de medidas repetidas, com o intuito de comparar cada uma das categorias de perguntas do teste, tendo grupo como variável inter-participantes (três níveis: grupo A - adultos, grupo B - crianças de 7º ano e grupo C - crianças de 5º ano) e categoria de teste como variável intra-participantes (dois níveis: Categoria compreensão de magnitudes, Categoria conceptual). A figura 3.10 ilustra a média (e erro padrão) das classificações das categorias conceptual e de compreensão de magnitudes do teste de conhecimentos de frações, por grupo.

Observou-se um efeito de categoria de pergunta ($F(1,68)=25{,}6$, $p<.001$), com a categoria conceptual $(\bar{x} \approx 38{,}944)$ a registar valores significativamente superiores em relação à categoria de compreensão de magnitudes $(\bar{x} \approx 29{,}198)$.

Não foram encontradas diferenças significativas entre grupos.

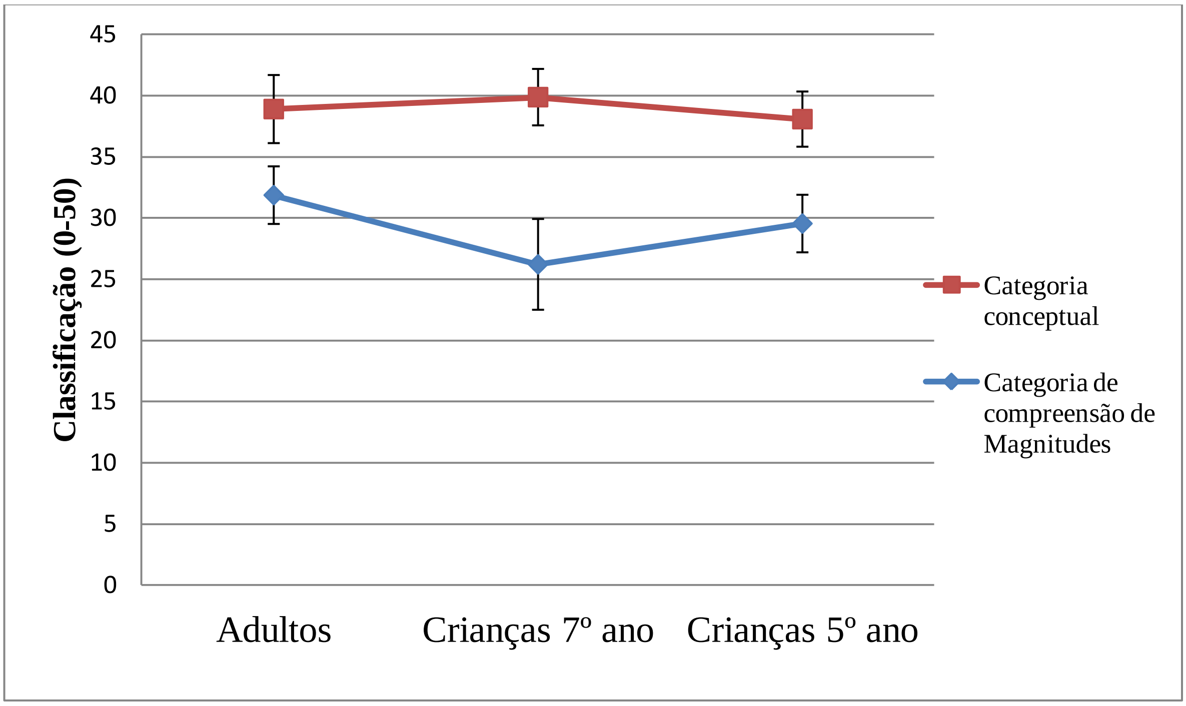


Figura 3.10: Média (e erro padrão) das classificações (0-50) das categorias conceptual e de compreensão de magnitudes do teste de conhecimentos de frações, por grupo de participantes.

3. 5 Correlações entre as tarefas de classificação e o teste de conhecimentos de frações

Foram procuradas correlações entre o desempenho no teste de conhecimento de frações e os resultados da tarefa de classificação mesmo-diferente. Conduziram-se correlações parciais de *Pearson*, controlando para a variável grupo, entre os indicadores de desempenho no teste de conhecimentos de frações: resultado em percentagem do teste de conhecimentos de frações, resultado da categoria conceptual, resultado da categoria de compreensão de magnitudes e os indicadores de desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente: média dos valores de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica, média dos valores de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada para cada ordem de apresentação, valores de *Δd'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica, valores de *Δd'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Não simbólica – Simbólica, valores de *Δd'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Simbólica - Não simbólica.

A tabela D (ver apêndice II) contém os coeficientes de correlação de *Pearson* e respetivos níveis de significância dos referidos testes.

Foi encontrada uma correlação positiva significativa entre as classificações do teste de conhecimentos de frações e a média de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Não simbólica - Simbólica [r(69)= . .257, p = .03]. Encontrou-se também uma correlação positiva significativa entre as classificações do teste de conhecimentos de frações e a média de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Simbólica - Não simbólica [r(69)= . .379, p = .001].

Encontrou-se ainda uma correlação positiva entre os valores de Δ*d'* na tarefa de classificação mesmo diferente e os valores de *Δd'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Não simbólica - Simbólica [r(69)= . .250, p = .037].

Foram também analisadas as correlações entre cada categoria do teste de conhecimentos de frações com os indicadores da tarefa de classificação mesmo-diferente. Foi encontrada uma correlação positiva significativa entre as classificações da categoria de compreensão de magnitudes do teste de conhecimentos de frações e a média de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Não simbólica - Simbólica [r(69)= .250, p = .037]. As classificações da categoria de compreensão de magnitudes do teste de conhecimentos de frações correlacionaram-se também positivamente de forma significativa com a média de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Simbólica - Não simbólica [r(69)= .278, p = .02] e com os valores de *Δd'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Não simbólica - Simbólica [r(69)= .282, p = .018].

As classificações da categoria conceptual do teste de conhecimentos de frações correlacionaram-se também positivamente de forma significativa com a média de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, ordem Simbólica - Não simbólica [r(69)= .320, p = .007] .

No que diz respeito às correlações entre as classificações teste de conhecimentos de frações com os indicadores de desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica, apenas foi encontrada uma correlação significativa entre a categoria conceptual do teste e os valores de *Δd'* [r (69)= .283, p = .018].

4. Discussão

4.1. Relevância dos resultados obtidos

O presente estudo explorou a forma como se desenvolvem as representações não simbólicas e simbólicas de números fracionários e a relação que estas representações têm com o sucesso em tarefas aritméticas.

Concretamente, pretendeu-se estudar a precisão das representações da magnitude de números fracionários em três grupos de participantes de níveis de escolarização distintos, através de uma tarefa de classificação mesmo-diferente, adaptada da tarefa proposta em Gabriel & Szucs (2013). Para além do formato simbólico utilizado no referido estudo, foi adicionado um formato cruzado, com o objetivo de explorar as relações entre as representações simbólicas e não simbólicas de números fracionários.

Esta tarefa implicou que participantes associassem uma representação pictórica de uma fração (notação não simbólica) a uma representação simbólica da mesma, e vice-versa. Esta associação permitiu caracterizar o mapeamento das representações simbólicas e não simbólicas de números fracionários, isto é, caracterizar a capacidade de associar uma representação simbólica de uma fração a uma representação não simbólica. A utilização de três grupos de escolarização permitiu explorar a evolução temporal desta capacidade.

No desenho inicial da tarefa de classificação mesmo-diferente, esteve contemplada a utilização de um formato exclusivamente não simbólico, isto é, um formato em que os pares de frações a comparar fossem apenas representações pictóricas. No entanto, uma vez que o desenho da tarefa não permitia controlar parâmetros visuais, optou-se por eliminar esta sub-tarefa.

Os resultados da tarefa de classificação mesmo-diferente e os efeitos de distância encontrados confirmam a expectativa de um aumento da precisão das representações ao longo do crescimento. A análise de correlações entre os resultados da tarefa de classificação mesmo-diferente e o desempenho no teste de conhecimento de frações, reforçam a ideia de que a compreensão de magnitudes influencia positivamente o desempenho na disciplina de matemática.

No seu conjunto, os dados desta experiência constituem uma ferramenta de caracterização das representações da magnitude de números fracionários.

Como esperado, em geral, os adultos demonstraram um melhor desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente relativamente aos restantes grupos, refletido por valores superiores de d’ neste grupo.

A inexistência de diferenças significativas nas taxas de acertos e médias de d’ da tarefa de classificação mesmo-diferente, entre os dois grupos de crianças, sugere que possivelmente as diferenças no desempenho poderão dever-se maioritariamente a razões associadas à maturação de estruturas cognitivas que facilitam a realização da tarefa, e não à instrução formal e à manipulação simbólica em contexto escolar.

Especificamente, no que diz respeito à tarefa de classificação mesmo-diferente em notação simbólica, verificou-se, para os ensaios da condição “diferente” um efeito de distância. Os resultados desta tarefa mostram uma manifestação superior deste efeito no grupo de crianças do 7º ano em relação ao grupo de adultos. No grupo crianças de 5º ano este efeito é quase inexistente.

Estes resultados replicam, para números fracionários, o padrão de evolução do efeito de distância encontrado em números inteiros, marcado por uma diminuição com o aumento da idade (e.g., Duncan & McFarland, 1980; Holloway & Ansari, 2009). A comparação de quantidades relativas evidencia também um efeito de distância, e este efeito diminui ao longo do crescimento.

A presença de efeito de distância na tarefa deste estudo difere dos resultados reportados por Gabriel e Szucs (2013), que não encontraram efeitos de distância numa tarefa de classificação mesmo-diferente com desenho semelhante. A diferença dos resultados pode ser explicada pelo facto da apresentação das frações no presente estudo ter sido sequencial e não simultânea, como aconteceu no estudo de Gabriel e Szucs (2013). Para além disso, nesta tarefa o tempo de apresentação das frações foi inferior ao utilizado no referido estudo. Estas alterações poderão ter limitado a utilização de estratégias de cálculo numérico envolvendo as frações a comparar, o que permitiu aceder de forma mais fidedigna às representações numéricas.

Relativamente aos ensaios da condição “mesmo”, como esperado, o desempenho na classificação de frações da condição “identidade” foi melhor do que na condição “equivalente”. Surpreendentemente, os resultados do grupo de adultos na condição mesmo equivalente, foram significativamente melhores do que os do grupo de crianças. Sendo esta uma decisão com uma carga conceptual elevada, e tendo os participantes adultos um aparente fraco contacto com a matemática, era expectável que os resultados fossem semelhantes ou até piores aos encontrados no grupo de crianças de 7º ano.

Na tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada, verificaram-se também melhores resultados no grupo de adultos do que nos grupos de crianças. Para os ensaios da condição “diferente” foi encontrada uma interação entre os fatores distância e grupo etário, sendo que o efeito de distância apenas se manifestou significativamente no grupo de adultos. Tais resultados podem ser resultado de uma melhoria das representações numéricas em função da idade, mas também podem ser um reflexo do grau de dificuldade da tarefa e das suas exigências cognitivas, que a tornaram mais acessível para o grupo de participantes adultos, que possuem funções executivas mais desenvolvidas.

Nos ensaios da condição “mesmo”, verificou-se, à semelhança do observado na tarefa em notação simbólica, que o desempenho na classificação de frações na condição identidade foi melhor do que na condição equivalente.

Na tarefa em notação cruzada, é de salientar a existência de diferenças em relação à ordem de apresentação das frações. Os ensaios em que a primeira fração era simbólica, resultaram numa maior taxa de acertos, e consequentemente em valores superiores de *d’* em relação aos ensaios em que a primeira fração era não simbólica. Uma possível explicação para esta diferença poderá residir da estratégia utilizada pelos participantes: Quando confrontados com a imagem representativa da fração, os participantes poderão ter recorrido à contagem das partes pintadas em relação ao todo, por forma a memorizar a fração representada e posteriormente compara-la com a fração seguinte. Este processo será mais dispendioso do que o de memorizar uma fração em formato simbólico e depois associa-la a uma representação não simbólica.

Assim como aconteceu na tarefa em notação simbólica, também na tarefa em notação cruzada, o desempenho dos adultos foi superior ao das crianças. No entanto, o efeito de distância observado no grupo de adultos foi superior ao verificado no grupo de crianças do 7º ano, que apenas o revela quando a primeira fração é simbólica, estando este ausente quando esta é não-simbólica.

Entre os três grupos de participantes, não se verificaram diferenças significativas nos resultados do teste de conhecimento de frações. Todos grupos evidenciaram melhores resultados na categoria conceptual, em relação à categoria de compreensão de magnitudes.

Sendo um dos objetivos do presente estudo explorar o impacto da precisão das representações da magnitude de números fracionários na destreza aritmética envolvendo frações, foram exploradas correlações entre os valores de *d’* na tarefa de classificação mesmo-diferente e os resultados do teste de conhecimentos de frações, controlando para os efeitos de grupo.

Em relação à tarefa em notação simbólica, nenhum dos indicadores se correlacionou positivamente de forma significativa com os resultados do teste de conhecimentos de frações.

Os resultados do teste de conhecimentos de frações correlacionaram-se positivamente com a maior parte dos indicadores da tarefa em notação cruzada: *d'* notação cruzada, ordem Não simbólica – Simbólica, *d'* notação cruzada, ordem simbólica Não Simbólica e Δ*d'* notação cruzada, ordem Não simbólica - Simbólica. O sucesso na tarefa em notação cruzada implicava uma noção da magnitude que uma representação simbólica representa, pelo que a existência de correlações positivas com os resultados do teste de conhecimentos de frações atribui uma notória importância ao eficaz mapeamento entre representações simbólicas e não simbólicas de números fracionários.

Estes resultados reforçam a ideia de que a compreensão de magnitudes influencia o sucesso na disciplina de matemática, como os já referidos estudos apontam (Booth, Newton & Twiss-Garrity, 2014, Siegler et al., 2011).

No seu conjunto, os dados deste estudo revelam um desempenho superior do grupo participantes adultos, que apesar de aparentemente não ter contacto direto com matemática e cálculo,, mostrou um melhor desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente, em particular na tarefa em notação cruzada, em relação aos grupos de crianças. As diferenças significativas entre o grupo do 7º ano e o grupo dos adultos, pode sugerir que esta capacidade nuclear continua a ser desenvolvida durante o período de adolescência, pois não aparenta estar completamente maturada no grupo do 7º ano.

4.2. Implicações

As correlações encontradas entre a capacidade de emparelhar frações na tarefa em formato cruzado (isto é a associação de uma representação não simbólica a uma representação simbólica de uma fração e vice versa) e as classificações do teste de conhecimentos de frações reforçam a importância de privilegiar estratégias de ensino que fortaleçam as associações entre as representações não simbólicas e simbólicas de números fracionários. Como referido, a manipulação simbólica de números fracionários é uma área em que as crianças atravessam dificuldades. Possivelmente a razão destas dificuldades prende-se com a fraca associação de significado aos símbolos manipulados. Investir numa instrução que consolide a associação entre as representações simbólicas e não simbólicas pode provar-se uma estratégia eficaz para reverter estas dificuldades.

4.3. Limitações

A tarefa de classificação mesmo-diferente em notação cruzada visou explorar o mapeamento entre representações não simbólicas e simbólicas. De forma a obter uma caracterização livre de estratégias de cálculo, optou-se por definir uma apresentação sequencial das frações a comparar e reduzir o tempo de apresentação. Esta decisão tornou a tarefa mais difícil e por essa razão gerou resultados muito baixos, em particular no grupo de crianças de 5º ano. Seria interessante testar a mesma tarefa com um ligeiro aumento do tempo de apresentação. Sendo esta uma área pouco explorada, em particular em Portugal, não existem baterias de testes para o estudo das questões colocadas no âmbito deste estudo. Como tal, alguns dos testes utilizados foram adaptados de outros testes produzidos de outros trabalhos (e.g. Gabriel & Szucs, 2013). No caso do conjunto de exercícios do teste de conhecimentos e aritmética de frações, os exercícios foram adaptados de forma a corresponderem a linguagem e metodologia utilizadas no programa curricular português. No entanto, vários detalhes da experiência foram construídos de raiz, o que dificulta a comparação destes resultados com os obtidos noutros estudos.

O desenho experimental do formato não simbólico foi uma fragilidade do presente trabalho, pois as representações pictóricas de círculos parcialmente pintados não permitem controlar alguns aspetos visuais, pelo que não foi possível incluir a tarefa em formato não simbólico.

Outra limitação deste trabalho prende-se com o reduzido número de participantes, em particular do grupo de crianças de 7º ano. A aplicação desta tarefa a grupos de maior dimensão, de constituição homogénea, poderia permitir resultados mais consistentes.

4.4. Direções e sugestões futuras de estudo

Seria interessante de futuro utilizar diferentes formatos não simbólicos de razões entre duas quantidades, nomeadamente conjuntos de pontos em duas cores.

Permanece por identificar a razão das diferenças entre os resultados do grupo de crianças de 7º ano e o grupo de adultos. A realização de tarefas que estudem funções executivas poderá permitir identificar se os processos executivos mais desenvolvidos de participantes adultos explicavam um maior sucesso na tarefa.

Para compreender se as diferenças entre os grupos de crianças e adultos se devem a fatores relacionados com maturação de estruturas cognitivas, seria também interessante aplicar a tarefa a adultos com formação em áreas relacionadas com a matemática.

Devido à recente inclusão de razões de quantidades no campo de estudo da cognição numérica, existem poucas baterias de testes que explorem as representações numéricas de números fracionários, pelo que seria útil o desenvolvimento de testes normativos nesta área.

Sendo a tarefa de classificação mesmo-diferente um estudo de natureza comportamental, seria interessante replicá-la envolvendo técnicas de neuroimagiologia, ou recorrendo a tecnologias de *eye tracking*, de forma a melhor identificar e perceber as diferentes estratégias utilizadas no decorrer da experiência.

5. Conclusão

O presente estudo procurou oferecer uma caracterização da capacidade de representar magnitudes de números fracionários, ao longo do desenvolvimento.

Foram encontradas diferenças no desempenho dos três grupos de participantes, verificando-se uma melhoria do desempenho com o aumento da idade. Seria interessante realizar testes subsequentes para perceber se estas diferenças se devem a aspetos relacionados com a maturação de estruturas envolvidas em processos executivos necessários à tarefa, ou a uma maior precisão das representações numéricas.

As correlações encontradas entre o desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente e o teste de conhecimentos e aritmética de frações corroboram a hipótese estabelecida, de que uma maior precisão das representações numéricas está associada a um melhor desempenho. A dificuldade que as crianças tendem a apresentar com cálculo envolvendo frações poderá em parte ser explicada por um fraco conhecimento da magnitude que uma representação simbólica representa. As crianças em idade escolar, e até alguns adultos parecem ter um fraco conhecimento dos valores representados por símbolos como 2/7 ou 3/8.

Os resultados do presente estudo permitem conjeturar sobre uma possível influência positiva de uma instrução mais forte na atribuição de significado aos símbolos que representam a razão de duas quantidades.

Do ponto de vista da ciência cognitiva, permanecem por responder algumas questões relacionadas com as bases e etapas de desenvolvimento de processos de cognição numérica. A sua resposta exigirá interação de áreas como a Psicologia Cognitiva, a Matemática, a Neurociência ou mesmo a Linguística. Este estudo pretendeu ser um possível passo para responder a algumas destas questões.

Bibliografia

Dehaene, S. (1999). The number sense. New York: Oxford

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, *9*(4), 278-291.

Brannon, E. M. (2006). The representation of numerical magnitude. *Current opinion in neurobiology*, *16*(2), 222-229.

Nieder, A., & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual review of neuroscience*, *32*, 185-208.

Shuman, M., & Kanwisher, N. (2004). Numerical magnitude in the human parietal lobe: Tests of representational generality and domain specificity. *Neuron*, *44*(3), 557-569.

Jacob, S. N., Vallentin, D., & Nieder, A. (2012). Relating magnitudes: the brain's code for proportions. *Trends in cognitive sciences*, *16*(3), 157-166.

Gabriel, F. C., & Szucs, D. (2013). The Development of the Mental Representations of the Magnitude of Fractions. *PLoS One*, *8*(11).

Kobayashi, T., Hiraki, K., Mugitani, R., & Hasegawa, T. (2004). Baby arithmetic: One object plus one tone. *Cognition*, *91*(2), B23-B34.

Cantlon, J. F., & Brannon, E. M. (2006). Shared system for ordering small and large numbers in monkeys and humans. *Psychological Science*, *17*(5), 401-406.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, *306*(5695), 499-503.

Nieder, A. (2005). Counting on neurons: the neurobiology of numerical competence. *Nature Reviews Neuroscience*, *6*(3), 177-190.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144-150.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, *74*(1), B1-B11.

Wood, J. N., & Spelke, E. S. (2005). Infants' enumeration of actions: Numerical discrimination and its signature limits. *Developmental science*, *8*(2), 173-181.

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the" Number Sense": The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental psychology*, *44*(5), 1457.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. Child Development Perspectives, 8(3), 144-150.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (2000). Non-verbal numerical cognition: From reals to integers. *Trends in cognitive sciences*, *4*(2), 59-65.

Dehaene, S. (2003). The neural basis of the Weber–Fechner law: a logarithmic mental number line. *Trends in cognitive sciences*, *7*(4), 145-147.

Cantlon, J. F., & Brannon, E. M. (2007). Basic math in monkeys and college students. *PLoS Biol*, *5*(12), e328.

Fias, W., Lammertyn, J., Reynvoet, B., Dupont, P., & Orban, G. A. (2003). Parietal representation of symbolic and nonsymbolic magnitude. *Journal of cognitive neuroscience*, *15*(1), 47-56.

Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J., & Pelphrey, K. A. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLoS Biol*, *4*(5), e125.

Diester, I., & Nieder, A. (2007). Semantic associations between signs and numerical categories in the prefrontal cortex. *PLoS Biol*, *5*(11), e294.

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, *215*(5109), 1519.

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*,*44*(3), 547-555.

Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. *Cognitive Neuroscience, Journal of*, *5*(4), 390-407.

Nieder, A., Freedman, D. J., & Miller, E. K. (2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, *297*(5587), 1708-1711.

Pietroski, P., Lidz, J., Hunter, T., & Halberda, J. (2009). The meaning of 'most': Semantics, numerosity and psychology. *Mind & Language*, *24*(5), 554-585.

Roggeman, C., Verguts, T., & Fias, W. (2007). Priming reveals differential coding of symbolic and non-symbolic quantities. *Cognition*, *105*(2), 380-394.

Duncan, E. M., & McFarland, C. E. (1980). Isolating the effects of symbolic distance, and semantic congruity in comparative judgments: An additive-factors analysis. *Memory & Cognition*, *8*(6), 612-622.

Sekuler, R., & Mierkiewicz, D. (1977). Children's judgments of numerical inequality. *Child Development*, 630-633.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive neuropsychology*, *20*(3-6), 487-506.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number.*Trends in cognitive sciences*, *8*(7), 307-314.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current opinion in neurobiology*, *14*(2), 218-224.

Pinel, P., Dehaene, S., Riviere, D., & LeBihan, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage*,*14*(5), 1013-1026.

Ansari, D., & Dhital, B. (2006). Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing: an event-related functional magnetic resonance imaging study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *18*(11), 1820-1828.

Gogtay, N., Giedd, J. N., Lusk, L., Hayashi, K. M., Greenstein, D., Vaituzis, A. C., ... & Thompson, P. M. (2004). Dynamic mapping of human cortical development during childhood through early adulthood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *101*(21), 8174-8179.

Wilson, M. L., Britton, N. F., & Franks, N. R. (2002). Chimpanzees and the mathematics of battle. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, *269*(1496), 1107-1112.

Singh, D. (1993). Adaptive Significance of Female Physical Attractiveness: Role of Waist-to-Hip Ratio. *Journal of Personality and Social Psychology*, *65*(2), 293-307.

Monteiro, C, Pinto H., Ribeiro S. (2010) Mp.5 Matemática Para Pensar – Manual. *Sebenta*.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 629-667.

Bonato, M., Fabbri, S., Umilta, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer?. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *33*(6), 1410.

Sprute, L., & Temple, E. (2011). Representations of fractions: Evidence for accessing the whole magnitude in adults. *Mind, Brain, and Education*, *5*(1), 42-47.

Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2009). Rational numbers: Componential versus holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *62*(8), 1598-1616.

Ischebeck, A., Schocke, M., & Delazer, M. (2009). The processing and representation of fractions within the brain: An fMRI investigation. *NeuroImage*,*47*(1), 403-413.

Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *36*(5), 1227.

Jacob, S. N., & Nieder, A. (2009). Notation-independent representation of fractions in the human parietal cortex. *The Journal of Neuroscience*, *29*(14), 4652-4657.

Vallentin, D., & Nieder, A. (2010). Representations of visual proportions in the primate posterior parietal and prefrontal cortices. *European Journal of Neuroscience*, *32*(8), 1380-1387.

Grill-Spector, K., Kushnir, T., Edelman, S., Avidan, G., Itzchak, Y., & Malach, R. (1999). Differential processing of objects under various viewing conditions in the human lateral occipital complex. *Neuron*, 24(1), 187-203.

Piazza, M., Mechelli, A., Price, C. J., & Butterworth, B. (2006). Exact and approximate judgements of visual and auditory numerosity: An fMRI study.*Brain research*, *1106*(1), 177-188.

Singer-Freeman, K. E., & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates?: Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, *16*(3), 811-829.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology*, *62*(4), 273-296.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences*,*17*(1), 13-19.

Meert, G., Grégoire, J., Seron, X., & Noël, M. P. (2012). The mental representation of the magnitude of symbolic and nonsymbolic ratios in adults.*The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *65*(4), 702-724.

Meert, G., Grégoire, J., Seron, X., & Noël, M. P. (2013). The Processing of Symbolic and Nonsymbolic Ratios in School-Age Children. *PLoS ONE*, *8*(11).

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *113*(3), 447-455.

Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *123*, 53-72.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. *Rational numbers: An integration of research*, 157-195.

Macmillan, N. A., & Creelman, C. D. (2005). Detection Theory: A User's Guide Lawrence Erlbaum Associates. *New York*.

Stanislaw, H., & Todorov, N. (1999). Calculation of signal detection theory measures. *Behavior research methods, instruments, & computers*, *31*(1), 137-149.

ANEXOS

Anexo I: Lista de frações utilizadas na tarefa de comparação mesmo-Diferente.

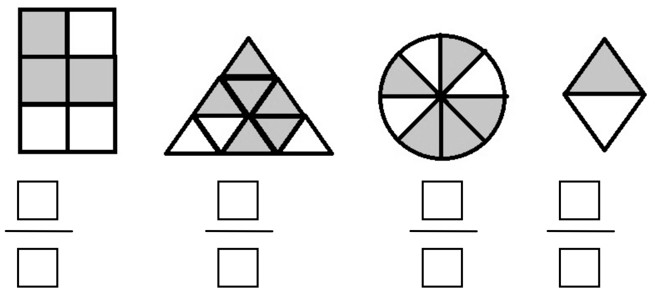
Fração 1	Fração 2	Valor numérico fração 1	Valor numérico fração 2	Distância	Categoria Distância	Condição
2/7	3/4	0,29	0,75	0,46	Distante	Diferente
3/4	2/7	0,75	0,29	0,46	Distante	Diferente
2/7	5/6	0,29	0,83	0,55	Distante	Diferente
2/7	5/6	0,29	0,83	0,55	Distante	Diferente
5/6	2/7	0,83	0,29	0,55	Distante	Diferente
5/6	2/7	0,83	0,29	0,55	Distante	Diferente
2/7	7/9	0,29	0,78	0,49	Distante	Diferente
7/9	2/7	0,78	0,29	0,49	Distante	Diferente
3/4	5/6	0,75	0,83	0,08	Próximo	Diferente
5/6	3/4	0,83	0,75	0,08	Próximo	Diferente
3/4	7/9	0,75	0,78	0,03	Próximo	Diferente
7/9	3/4	0,78	0,75	0,03	Próximo	Diferente
3/4	2/7	0,75	0,29	0,46	Distante	Diferente
3/4	2/7	0,75	0,29	0,46	Distante	Diferente
2/7	3/4	0,29	0,75	0,46	Distante	Diferente
2/7	3/4	0,29	0,75	0,46	Distante	Diferente
5/6	3/4	0,83	0,75	0,08	Próximo	Diferente
3/4	5/6	0,75	0,83	0,08	Próximo	Diferente
5/6	7/9	0,83	0,78	0,06	Próximo	Diferente
7/9	5/6	0,78	0,83	0,06	Próximo	Diferente
5/6	2/7	0,83	0,29	0,55	Distante	Diferente
2/7	5/6	0,29	0,83	0,55	Distante	Diferente
7/9	3/4	0,78	0,75	0,03	Próximo	Diferente
7/9	3/4	0,78	0,75	0,03	Próximo	Diferente
3/4	7/9	0,75	0,78	0,03	Próximo	Diferente
3/4	7/9	0,75	0,78	0,03	Próximo	Diferente
7/9	5/6	0,78	0,83	0,06	Próximo	Diferente
7/9	5/6	0,78	0,83	0,06	Próximo	Diferente
5/6	7/9	0,83	0,78	0,06	Próximo	Diferente
5/6	7/9	0,83	0,78	0,06	Próximo	Diferente
7/9	2/7	0,78	0,29	0,49	Distante	Diferente
2/7	7/9	0,29	0,78	0,49	Distante	Diferente

Fração 1	Fração 2	Valor numérico fração 1	Valor numérico fração 2	Distância	Categoria Distância	Condição
2/3	6/9	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
2/3	6/9	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
2/3	6/9	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
2/3	6/9	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
3/4	6/8	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
3/4	6/8	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
3/4	6/8	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
3/4	6/8	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/8	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/8	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/8	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/8	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/9	2/3	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/9	2/3	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/9	2/3	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
6/9	2/3	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Equivalente	Igual
2/7	2/7	0,29	0,29	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
2/7	2/7	0,29	0,29	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
2/7	2/7	0,29	0,29	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
2/7	2/7	0,29	0,29	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
3/4	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
3/4	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
3/4	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
3/4	3/4	0,75	0,75	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
5/6	5/6	0,83	0,83	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
5/6	5/6	0,83	0,83	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
5/6	5/6	0,83	0,83	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
5/6	5/6	0,83	0,83	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
7/9	7/9	0,78	0,78	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
7/9	7/9	0,78	0,78	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
7/9	7/9	0,78	0,78	0,00	Mesmo, Identidade	Igual
7/9	7/9	0,78	0,78	0,00	Mesmo, Identidade	Igual

Fração 1	Fração 2	Valor numérico fração 1	Valor numérico fração 2	Distância	Categoria Distância	Condição
6/7	5/8	0,86	0,63	0,23	Próximo	*fillers*
6/7	5/8	0,86	0,63	0,23	Próximo	*fillers*
5/8	6/7	0,63	0,86	0,23	Próximo	*fillers*
5/8	6/7	0,63	0,86	0,23	Próximo	*fillers*
1/5	1/6	0,20	0,17	0,03	Próximo	*fillers*
1/5	1/6	0,20	0,17	0,03	Próximo	*fillers*
1/6	1/5	0,17	0,20	0,03	Próximo	*fillers*
1/6	1/5	0,17	0,20	0,03	Próximo	*fillers*
1/5	4/5	0,20	0,80	0,60	Distante	*fillers*
1/5	4/5	0,20	0,80	0,60	Distante	*fillers*
4/5	1/5	0,80	0,20	0,60	Distante	*fillers*
4/5	1/5	0,80	0,20	0,60	Distante	*fillers*
4/5	1/6	0,80	0,17	0,63	Distante	*fillers*
4/5	1/6	0,80	0,17	0,63	Distante	*fillers*
1/6	4/5	0,17	0,80	0,63	Distante	*fillers*
1/6	4/5	0,17	0,80	0,63	Distante	*fillers*
1/5	1/5	0,20	0,20	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
1/5	1/5	0,20	0,20	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
1/6	1/6	0,17	0,17	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
1/6	1/6	0,17	0,17	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
4/5	4/5	0,80	0,80	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
4/5	4/5	0,80	0,80	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
5/8	5/8	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
5/8	5/8	0,67	0,67	0,00	Mesmo, Identidade	*fillers*
1/3	2/6	0,33	0,33	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*
1/3	2/6	0,33	0,33	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*
2/6	1/3	0,33	0,33	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*
2/6	1/3	0,33	0,33	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*
1/4	2/8	0,25	0,25	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*
1/4	2/8	0,25	0,25	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*
2/8	1/4	0,25	0,25	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*
2/8	1/4	0,25	0,25	0,00	Mesmo, Equivalente	*fillers*

Anexo II: Conjunto de exercícios de papel e lápis sobre aritmética de frações

1. Para cada figura, escreva a fração que representa a parte pintada.



2. Complete com os símbolos de >, < ou **= :**

a) $\frac{3}{5}$ ... $\frac{7}{5}$

b) $\frac{3}{7}$ ... $\frac{3}{9}$

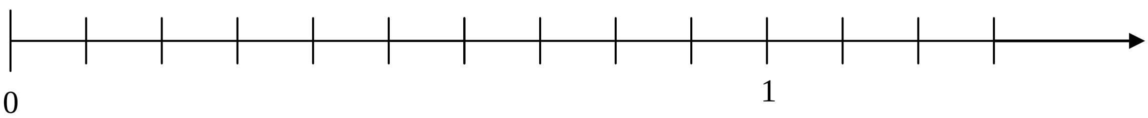
c) $\frac{1}{6}$ ... $\frac{3}{18}$

d) $\frac{2}{5}$ ... $\frac{1}{4}$

e) $\frac{4}{6}$ ... $\frac{5}{7}$

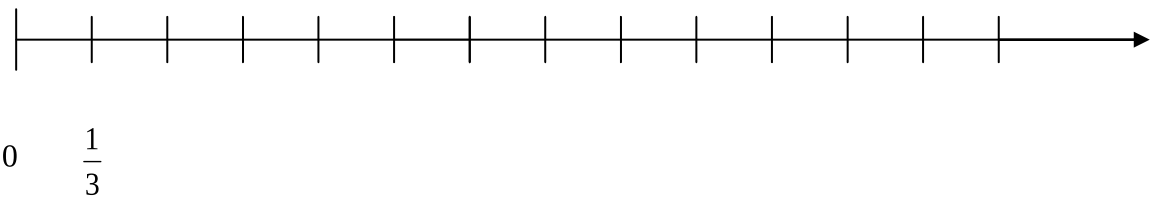
f) $\frac{2}{3}$ ... $\frac{1}{2}$

3. Represente cada uma das frações indicadas na reta numérica:



A→ $\frac{1}{2}$ B→ $\frac{4}{5}$ C→ $\frac{2}{10}$ D→ $\frac{3}{15}$

4. Represente a unidade da seguinte reta numérica:



5. Complete de modo a obter frações equivalentes:

$\frac{40}{100} = \frac{}{10}$ $\frac{15}{100} = \frac{}{20}$ $\frac{5}{6} = \frac{}{30}$ $\frac{12}{60} = \frac{}{5}$ $\frac{8}{20} = \frac{2}{}$ $\frac{32}{24} = \frac{}{6}$

$\frac{1}{4} = \frac{}{8}$ $\frac{6}{18} = \frac{}{3}$ $\frac{3}{9} = \frac{1}{}$ $\frac{3}{5} = \frac{6}{}$ $\frac{3}{6} = \frac{1}{}$ $\frac{14}{24} = \frac{7}{}$

6. Efetue e simplifique sempre que possível:

a. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$

b. $\frac{5}{9} - \frac{1}{9} =$

c. $\frac{1}{3} + \frac{3}{7} =$

d. $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} =$

e. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} =$

f. $\frac{5}{6} : \frac{2}{3} =$

g. $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{5}{6} =$

APÊNDICE

Apêndice I

Tabela A: Média (e desvio padrão) da taxa de acertos na tarefa de classificação mesmo-diferente para as notações simbólica e cruzada.

	Tarefa Notação simbólica			
		Adultos	Crianças 7º ano	Crianças 5º ano
Condição	Mesmo, equivalente	.85*(.15)	.80* (.13)	.75* (.21)
	Mesmo, identidade	.93* (.05)	.92* (.06)	.93* (.07)
	Diferente, próximo	.90* (.15)	.84* (.12)	.89* (.08)
	Diferente, distante	.96* (.03)	.92* (.07)	.90* (.07)
	Tarefa em Notação cruzada			
	Ordem Não simbólica - Simbólica			
		Adultos	Crianças 7º ano	Crianças 5º ano
Condição	Mesmo, equivalente	.53(.23)	.64* (.17)	.59* (.22)
	Mesmo, identidade	.70* (.18)	.70* (.14)	.68* (.17)
	Diferente, próximo	.80* (.17)	.67* (0.14)	.72* (.13)
	Diferente, distante	.90* (.09)	.79* (0.14)	.72* (.14)
	Ordem Simbólica - Não simbólica			
		Adultos	Crianças 7º ano	Crianças 5º ano
Condição	Mesmo, equivalente	.63* (.26)	.65* (.22)	.57 (.24)
	Mesmo, identidade	0.82* (.16)	.74* (.14)	.73* (.17)
	Diferente, próximo	0.82* (.17)	.70* (0.19)	.73* (.26)
	Diferente, distante	.91* (.08)	.77* (0.15)	.71* (.19)

Nota: desvio padrão entre parenteses.

*p<.001, de acordo com teste t para uma amostra. Desempenho foi comparado com 0.5, correspondendo ao nível do acaso.

Tabela B: Média (e desvio padrão) valores de *d'* na tarefa de classificação mesmo-diferente

Tarefa Notação simbólica

		Adultos	Crianças 7º ano	Crianças 5º ano
Condição	Mesmo, equivalente	3.09* (0.79)	2.22* (0.76)	2.19* (1.04)
	Mesmo, identidade	3.53* (0.95)	2.86* (0.80)	3.02* (0.78)
	Diferente, próximo	3.06* (0.93)	2.28* (0.77)	2.47* (0.83)
	Diferente, distante	3.34* (0.67)	2.73* (0.74)	2.60* (0.88)
	Tarefa em Notação cruzada			
	Ordem Não simbólica - Simbólica			
		Adultos	Crianças 7º ano	Crianças 5º ano
Condição	Mesmo, equivalente	1.24* (.73)	0.92* (.55)	0.93* (.81)
	Mesmo, identidade	1.78* (.73)	1.06* (.47)	1.21* (.84)
	Diferente, próximo	1.32* (.51)	0.92* (.42)	1.05* (.69)
	Diferente, distante	1.74* (.77)	1.05* (.54)	1.06* (.79)
	Ordem Simbólica - Não simbólica			
		Adultos	Crianças 7º ano	Crianças 5º ano
Condição	Mesmo, equivalente	1.63* (.89)	1.20* (1.05)	0.86* (.78)
	Mesmo, identidade	2.34* (.81)	1.45* (1.01)	1.40* (.87)
	Diferente, próximo	1.75* (.81)	1.14* (.90)	1.13* (.71)
	Diferente, distante	2.19* (.88)	1.41* (.90)	1.12* (.82)

Nota: desvio padrão entre parenteses.

*p<.001, de acordo com teste t para uma amostra. Desempenho foi comparado com 0, correspondendo ao nível do acaso para valores de *d'*.

Tabela C: Média e desvio padrão da variação de *d'* para cada grupo.

Δd'	Adultos	Crianças 7º ano	Crianças 5º ano
Média	0.2753	0.4458	0.1311
Desvio Padrão	0.617	0.421	0.439

Apêndice II

Tabela D – Coeficientes de correlação de *Pearson* entre indicadores de desempenho na tarefa de classificação mesmo-diferente e teste de conhecimento de frações.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	*d'* notação simbólica									
2	*d'* notação cruzada, ordem Não simbólica - Simbólica	,330**								
3	*d'* notação cruzada, ordem simbólica não simbólica	,406**	,767**							
4	Δ*d'* notação cruzada, ordem simbólica não simbólica	-,048	,168	,112						
5	Δ*d'* notação cruzada, ordem Não Simbólica - Simbólica	,014	,276*	,293**	,453**					
6	Δ*d'* notação simbólica	-,264*	,068	,115	,207*	,158				
7	Teste frações	,024	,257*	,379**	-,042	,250*	,189			
8	Teste frações – componente compreensão magnitudes	,067	,250*	,278**	,037	,282**	,019	,797**		
9	Teste frações – componente conceptual	-,031	,155	,320**	-,105	,110	,283**	,783**	,247*	

** A correlação é significativa no nível 0.01

*A correlação é significativa no nível 0.05